

Siedem zadań internautów

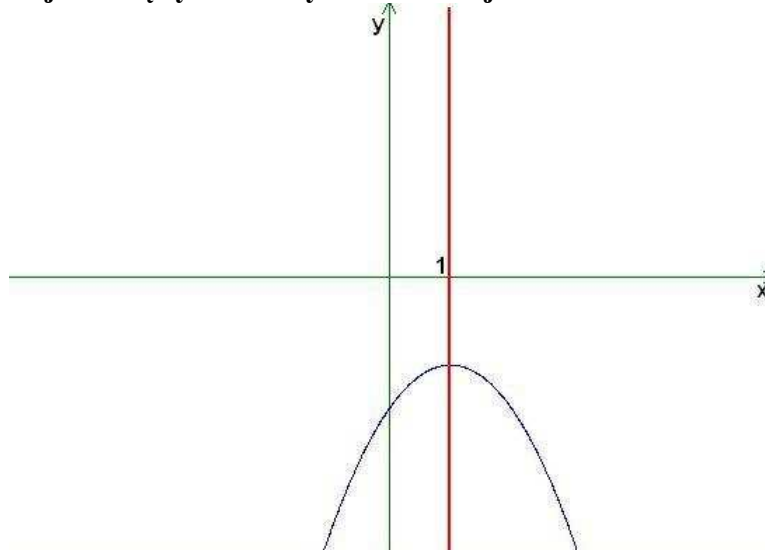
Zadanie 1- poziom wymagań: podstawowy

Współczynniki funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + bx + c$ tworzą w kolejności $-1, b, c$ ciąg geometryczny. Wyznacz wartość współczynników b i c , jeżeli wiadomo, że osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta $x = 1$. Zapisz funkcję w postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

$$f(x) = -x^2 + bx + c$$

Jeżeli prosta $x = 1$ jest osią symetrii wykresu funkcji:



to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli wynosi 1, czyli:

$$\frac{-b}{2 \cdot (-1)} = 1 \Leftrightarrow b = 2$$

Mamy: $f(x) = -x^2 + 2x + c$.

Ciąg geometryczny: $(-1, b, c) = (-1, 2, c)$.

Iloraz tego ciągu wynosi -2 , czyli $c = 2 \cdot (-2) = -4$.

Szukane współczynniki wynoszą: $b = 2$, $c = -4$, a równanie funkcji: $f(x) = -x^2 + 2x - 4$.

Druga współrzędna wierzchołka paraboli wynosi $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = -3$, czyli wierzchołek ma współrzędne $W = (1, -3)$.

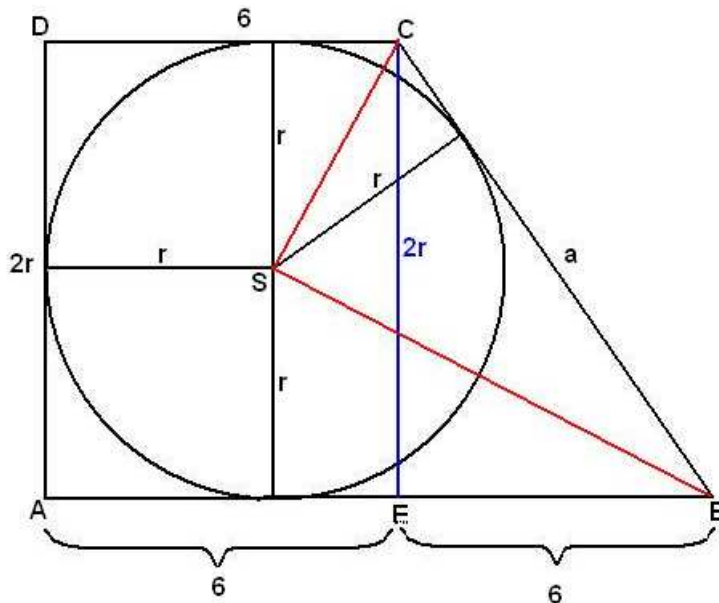
Postać kanoniczna funkcji: $f(x) = -(x - 1)^2 - 3$.

Zadanie 2 - poziom wymagań: rozszerzony

W trapez prostokątny ABCD (odcinek AD jest prostopadły do odcinka AB), którego podstawy mają długości $|AB| = 12$ i $|CD| = 6$, wpisano koło o środku S.

- Oblicz długość ramion trapezu ABCD.
- Uzasadnij, że trójkąt BSC jest prostokątny.

Rozwiązanie



a) Trapez jest opisany na kole. Z własności czworokąta opisanego na kole mamy:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

$$12 + 6 = 2r + a$$

$$2r + a = 18$$

Ponadto w trójkącie EBC: $(2r)^2 + 6^2 = a^2$.

Otrzymaliśmy układ równań:

$$\begin{cases} 2r + a = 18 \\ (2r)^2 + 6^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r + a = 18 \\ 4r^2 + 36 = a^2 \end{cases}$$

$$a = 18 - 2r$$

$$4r^2 + 36 = (18 - 2r)^2$$

$$4r^2 + 36 = 324 - 72r + 4r^2$$

$$72r = 288$$

$$r = 4$$

$$a = 18 - 2r = 18 - 2 \cdot 4 = 10$$

Ramiona trapezu mają długości: $|AD| = 2r = 8$ i $|BC| = a = 10$.

b) $|\angle ABC| + |\angle BCD| = 180^\circ$.

Środek koła wpisanego w trapez jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trapezu,

dlatego: $|\angle SCB| = \frac{1}{2} \cdot |\angle BCD|$ i $|\angle SBC| = \frac{1}{2} \cdot |\angle ABC|$.

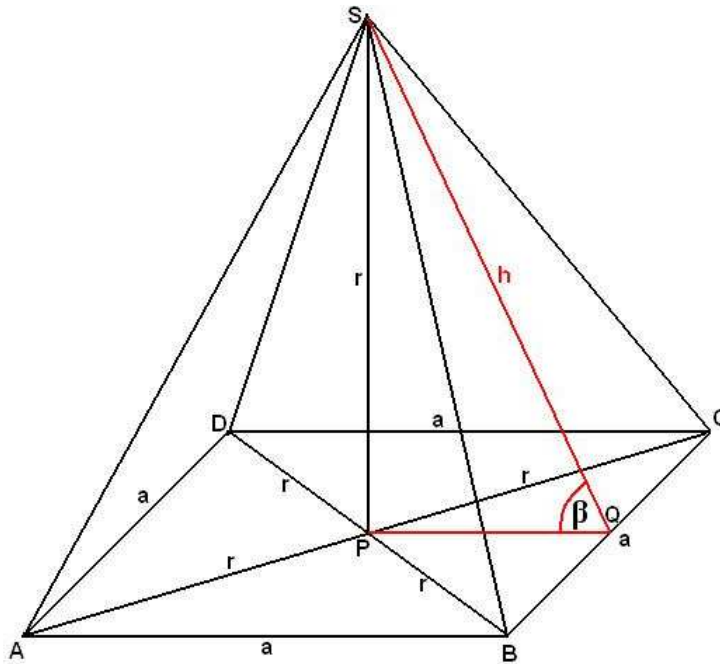
Dlatego $|\angle SCB| + |\angle SBC| = 90^\circ$.

$|\angle BSC| = 180^\circ - (|\angle SCB| + |\angle SBC|) = 90^\circ$, co dowodzi, że trójkąt BSC jest prostokątny.

Zadanie 3 - poziom wymagań: rozszerzony

Długość wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa długości promienia okręgu opisanego na podstawie. Pole ściany bocznej ostrosłupa jest równe $18\sqrt{3}$.

- Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- Zaznacz na rysunku kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy danego ostrosłupa i oblicz cosinus tego kąta.

Rozwiązanie

r – długość promienia okręgu opisanego na podstawie

$$\frac{1}{2}ah = 18\sqrt{3} \Leftrightarrow ah = 36\sqrt{3}$$

$$\text{W trójkącie PQS: } r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \Leftrightarrow 4r^2 + a^2 = 4h^2.$$

Ponadto $2r = a\sqrt{2}$ - długość przekątnej kwadratu o boku a .

Otrzymaliśmy układ równań:

$$\begin{cases} ah = 36\sqrt{3} \\ 2r = a\sqrt{2} \\ 4r^2 + a^2 = 4h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ah = 36\sqrt{3} \\ 2r = a\sqrt{2} \\ (2r)^2 + a^2 = 4h^2 \end{cases}$$

$2r = a\sqrt{2}$, stąd mamy:

$$\begin{cases} ah = 36\sqrt{3} \\ (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 4h^2 \end{cases}$$

$$2a^2 + a^2 = 4h^2$$

$$3a^2 = 4h^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$ah = 36\sqrt{3} \Leftrightarrow a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 36 \cdot 2 \Leftrightarrow a = 6\sqrt{2}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$$

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 6$$

Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144$$

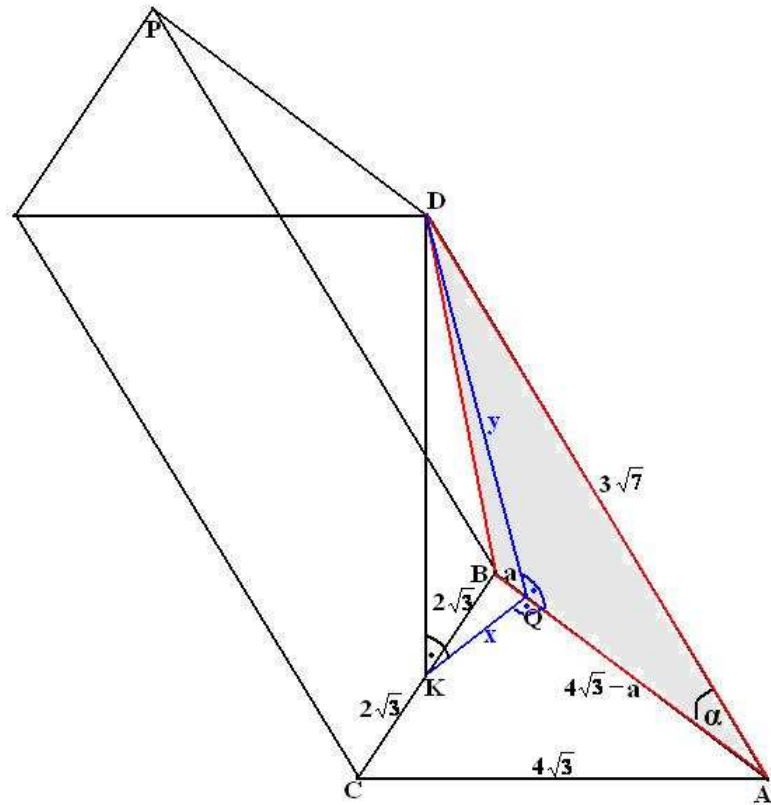
Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy oznaczono na rysunku β :

$$\cos\beta = \frac{|PQ|}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 4 - poziom wymagań: rozszerzony

Podstawą graniastoslupa ABCDEF jest trójkąt równoboczny o boku długości $4\sqrt{3}$. Rzut prostopadły wierzchołka D na płaszczyznę ABC jest środkiem krawędzi BC. Wyznacz miarę kąta między płaszczyzną ABC i płaszczyzną ABD, wiedząc, że krawędź boczna ma długość $3\sqrt{7}$.

Rozwiązanie



$|\angle KBQ| = 60^\circ$, dlatego w trójkącie BKQ:

$$\frac{x}{2\sqrt{3}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

oraz

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$$

W trójkącie ADQ:

$$\cos \alpha = \frac{4\sqrt{3} - a}{3\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

W trójkącie AQD stosujemy twierdzenie cosinusów:

$$y^2 = (3\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos \alpha = 63 + 27 - 18\sqrt{21} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 90 - 54 = 36$$

$$y = 6$$

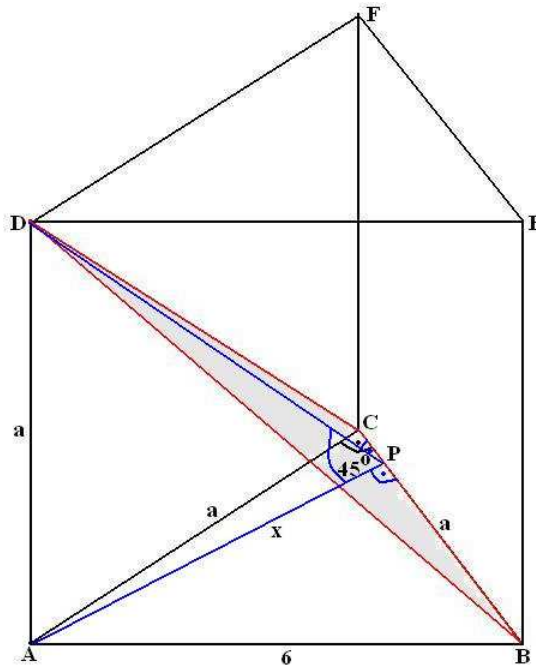
Szukany jest kąt KQD: $\cos \angle KQD = \frac{x}{y} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, stąd $\beta = 60^\circ$.

Zadanie 5 - poziom wymagań: rozszerzony

Wielościan ABCDEF jest graniastosłupem prostym, w którym $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = |AD| = a$, gdzie $a > 0$.

Dla jakiej wartości a kąt między płaszczyznami wyznaczonymi odpowiednio przez punkty A, B, C oraz D, B, C ma miarę 45° ?

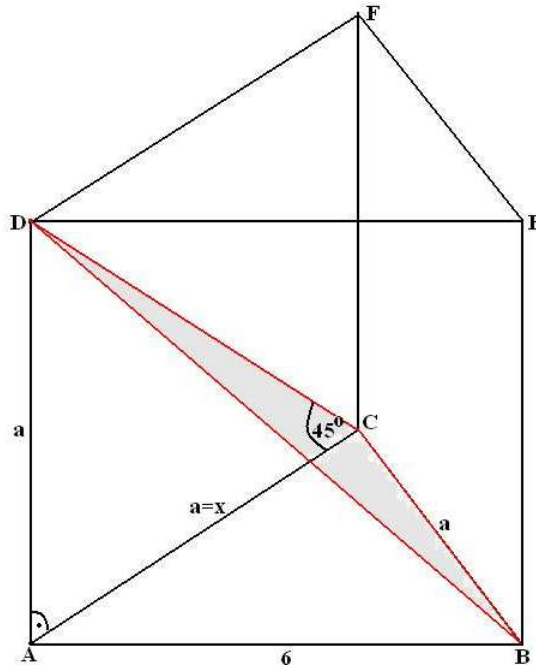
Rozwiązanie



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{x} = 1 \Leftrightarrow a = x$$

Taka sytuacja nie może zachodzić, bo a jest długością przeciwprostokątnej w trójkącie APC, zaś x – długością przyprostokątnej w tym trójkącie.

Wobec tego musi być tak:



Z definicji kąta dwusiecznego wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny, więc:

$$a^2 + a^2 = 36 \Leftrightarrow a^2 = 18 \Leftrightarrow a = 3\sqrt{2}.$$

Zadanie 6 - poziom wymagań: podstawowy

Ośmiu uczniów, wśród których są Ola i Janek, ustawiło się losowo w kolejce do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że Ola i Janek nie stoją obok siebie. Wyniki przedstaw w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Rozwiązanie

Oznaczmy: A - zdarzenie polegające na tym, że Ola i Janek nie stoją obok siebie.

$\overline{\Omega} = 8!$ - ilość wszystkich możliwych ustawień ośmiu osób w kolejkę.

Obliczymy: $P(A) = 1 - P(A')$

A' - zdarzenie polegające na tym, że Ola i Janek stoją obok siebie

Ola i Janek mogą stać obok siebie na pozycjach: 1 i 2, 2 i 3, 3 i 4, ..., 7 i 8, co daje 7 przypadków.

W każdym z tych przypadków Ola może stać przed Jankiem, lub za Jankiem – dlatego mamy $7 \cdot 2 = 14$ możliwości.

Jeżeli Ola i Janek zajmą już pozycje zgodnie z którąś z powyższych czternastu możliwości, to pozostałe 6 osób możemy ustawić na $6!$ sposobów.

W sumie: $\overline{A'} = 14 \cdot 6!$

Stąd mamy:

$$P(A') = \frac{\overline{A'}}{\overline{\Omega}} = \frac{14 \cdot 6!}{8!} = \frac{14}{7 \cdot 8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Zadanie 7 - poziom wymagań: I rok studiów

Ile jest różnych uporządkowanych par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\dots,n\}$?

Rozwiązanie**Metoda I**

Dla $n = 1$ ze zbioru $\{1\}$ mamy pary rozłącznych podzbiorów:

(\emptyset, \emptyset) , $(\emptyset, \{1\})$, $(\{1\}, \emptyset)$ (\emptyset - zbiór pusty).

Jest ich 3.

Dla $n = 2$ ze zbioru $\{1,2\}$ mamy pary rozłącznych podzbiorów:

(\emptyset, \emptyset) , $(\emptyset, \{1\})$, $(\{1\}, \emptyset)$, $(\emptyset, \{2\})$, $(\{2\}, \emptyset)$, $(\{1\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1\})$,

$(\emptyset, \{1,2\})$, $(\{1,2\}, \emptyset)$

Jest ich 9, czyli 3^2 .

Wobec tego stawiamy hipotezę, że wszystkich par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\dots,n\}$ jest 3^n . Hipotezę udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ - sprawdziliśmy: $3^1 = 3$.

Zakładamy, że dla zbioru $\{1,2,3,\dots,n\}$ istnieje 3^n par rozłącznych podzbiorów.

Należy udowodnić, że dla zbioru $\{1,2,3,\dots,n,n+1\}$ istnieje 3^{n+1} par rozłącznych podzbiorów.

Dla zbioru $\{1,2,3,\dots,n,n+1\}$ mamy 3^n par. Niech (A, B) będzie taką parą.

Do zbioru została dołączona liczba $n+1$.

Wobec tego dla każdej pary (A, B) dojdą nowe pary $(A, B \cup \{n+1\})$ i $(A \cup \{n+1\}, B)$.

Par było 3^n . Teraz jest $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, co kończy dowód.

Metoda II

Liczba wszystkich par rozłącznych podzbiorów zbioru $\{1,2,3,\dots,n\}$ jest określona

wzorem: $\binom{n}{0} \cdot 2^n + \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot 2^0$.

Uzasadnienie:

Przykładowo dla $n = 2$ liczba $\binom{2}{2} \cdot 2^{n-2}$ została wyznaczona następująco:

- wybieramy dowolny dwuelementowy podzbiór zbioru $\{1,2,3,\dots,n\}$ (będzie to pierwszy wyraz pary zbiorów)
- jako drugi wyraz pary zbiorów bierzemy dowolny podzbiór z $n-2$ elementowego zbioru, po odrzuceniu dwóch wybranych elementów. Korzystamy z tego, że zbiór k -elementowy ma 2^k podzbiorów.

Korzystając teraz ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$\binom{n}{0} \cdot 2^n + \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot 2^0 = (2+1)^n = 3^n$$