# BIULETYN MATURALNY

## NR 4

## CENTRALNEJ KOMISJI EGZAMINACYJNEJ

# MATEMATYKA

## SPIS TREŚCI



## WSTĘP

Numer czwarty *Biuletynu maturalnego* poświęcony jest egzaminowi maturalnemu z matematyki. **Rozdział I** poświęcony jest omówieniu struktury i formy egzaminu, zasad tworzenia arkuszy i zadań egzaminacyjnych.

W **Rozdziale II** zwracamy uwagę na nowe treści z *Podstawy programowej* oraz publikujemy artykuł nauczyciela akademickiego z Uniwersytetu Warszawskiego, doktora habilitowanego Michała Szurka.

W **Rozdziale III** przedstawiamy propozycję zestawu wzorów, z których zdający będzie mógł korzystać w czasie egzaminu. Nauczycieli matematyki bardzo prosimy o wypełnienie i przesłanie nam ankiety zamieszczonej na końcu tego biuletynu. Propozycje Państwa pomogą nam ustalić ostateczną wersję zestawu wzorów, który będzie ogłoszony przez Dyrektora CKE jako obowiązujący na egzaminie maturalnym z matematyki od 2005 roku.

W **Rozdziale IV** omawiamy błąd, jaki wystąpił w rozwiązaniu zadania zamieszczonego w *Informatorze maturalnym z matematyki od 2005 roku.*

## ROZDZIAŁ I

## O EGZAMINIE

Egzamin maturalny z matematyki od 2005 r. będzie zupełnie inny niż obecny. Przede wszystkim inna jest struktura i forma egzaminu. Pisemny egzamin z matematyki polega na rozwiązaniu zadań z *Arkusza I* (poziom podstawowy) lub z *Arkusza I* i *Arkusza II* (poziom rozszerzony). *Arkusz I* będzie zawierał od dziewięciu do jedenastu zadań. W tym arkuszu znajdą się zadania różnie punktowane: od 3 do 7 punktów. Podobnie *Arkusz II* też będzie zawierał od dziewięciu do jedenastu zadań, ale zadania mogą być punktowane do 10 punktów.

Nowością jest limit czasowy: uczeń na rozwiązanie zadań z *Arkusza I* ma 120 minut, a na rozwiązanie zadań z *Arkusza II* – 150 minut. Wymaga to specjalnego przygotowania uczniów. W tym celu trzeba przyzwyczaić uczniów do:

- dokładnej analizy treści zadania,
- wykonywania tylko czynności związanych z poleceniem w zadaniu, gdyż objaśnienia i komentarze, nawet poprawne, ale nie mające związku z poleceniem, nie będą oceniane,

- przedstawiania kompletnego rozwiązania – poza obliczeniami trzeba pokazać tok rozumowania.

Nowością jest również to, że na egzaminie będą sprawdzane prawie wszystkie treści wynikające z *Podstawy programowej* dla odpowiedniego poziomu.
Dla nauczyciela przygotowującego uczniów do egzaminu maturalnego ważna jest znajomość zasad konstruowania arkuszy egzaminacyjnych na nową maturę. Każdy nauczyciel, który chce doskonalić swój warsztat pracy może wykorzystywać te umiejętności do konstruowania np. prac klasowych po zakończeniu jakiegoś działu.

**Konstrukcja arkusza egzaminacyjnego**

Przed przystąpieniem do opracowywania arkusza egzaminacyjnego należy bardzo dokładnie przeanalizować *Standardy wymagań egzaminacyjnych*. Dokument ten wraz z opisem wymagań egzaminacyjnych jest, zarówno dla ucznia, jak i nauczyciela, najważniejszym źródłem informacji o tym, jakie wiadomości i umiejętności uczeń musi opanować, aby wynik egzaminu maturalnego był dla niego satysfakcjonujący.

Przedstawiona poniżej siatka egzaminu jest pomocą przy opracowywaniu arkusza egzaminacyjnego dla poziomu podstawowego. W tabeli tej, w kolumnie po lewej stronie wypisane są treści obowiązujące na poziomie podstawowym (*Standard I)*, a w górnym wierszu wypisane są standardy (zobacz *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 10 kwietnia 2003 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów*).
Następnie ustalamy jaki będzie procentowy udział poszczególnych treści (ostatnia kolumna po prawej stronie) oraz procentowy udział umiejętności (ostatni wiersz). Teraz przystępujemy do wypełnienia tabeli.
Przykład:

1. Wpisujemy w wierszu: *Funkcje wymierne, trygonometryczne*, *wielomiany* i w kolumnie: II. 2. b – 2 punkty.
2. Wpisujemy w wierszu: *Równania, nierówności, układy* i w kolumnie II. 1. b – 3 punkty.

W ten sposób wypełniamy całą tabelkę, pamiętając o przyjętych wcześniej założeniach.

# SIATKA EGZAMINU NA POZIOMIE PODSTAWOWYM

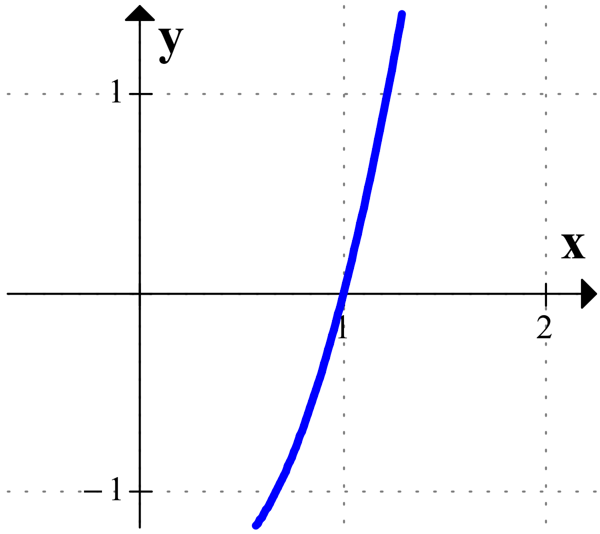
| Treści | Standardy*) | I. | II. | | | | | III. | | | | | | Procentowy udział materiału |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1. | | 2. | | | 1. | | | | 2. | | |
| | | | a | b | a | b | c | a | b | c | d | a | b | |
| **I. Liczby, równania i funkcje** | 1. Liczby rzeczywiste | | | | | | | | | | | | | |
| | 2. Funkcje wymierne, trygonometryczne wielomiany | | | | | 2p | | | | | | | | |
| | 3. Równania, nierówności, układy | | | 3p | | | | | | | | | | |
| **II. Ciągi** | 1. Określanie ciągów, własności ciągów | | | | | | | | | | | | | |
| | 2. Ciąg arytmetyczny i geometryczny, | | | | | | | | | | | | | |
| **III. Elementy rachunku prawdopodobieństwa** | 1. Elementy kombinatorki | | | | | | | | | | | | | |
| | 2. Prawdopodobieństwo | | | | | | | | | | | | | |
| | 3. Elementy statystyki | | | | | | | | | | | | | |
| **IV. Geometria** | 1. Figury na płaszczyźnie i ich własności miarowe | | | | | | | | | | | | | |
| | 2. Geometria analityczna | | | | | | | | | | | | | |
| | 3. Figury geometryczne w przestrzeni | | | | | | | | | | | | | |
| **Procentowy udział umiejętności sprawdzanych standardami** | | **10 – 30** | **20 – 40** | | | | | **20 – 40** | | | | | | |

*) Standardy:
- I. Wiadomości i rozumienie
- II. Korzystanie z informacji
- III. Tworzenie informacji

Po skonstruowaniu siatki przystępujemy do układania zadań.

Przykłady dwóch zadań

**Zadanie 1. (*2 pkt*)**
Na rysunku przedstawiony jest szkic fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f$ dla $x \in R$. Prosta o równaniu $x = \frac{1}{3}$ jest osią symetrii wykresu tej funkcji. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f\left(x\right) \leq 0$.




**Analiza treści zadania**
Zdający musi wykorzystać własności wykresu funkcji kwadratowej:
1. wykres ma oś symetrii,
2. osią symetrii tego wykresu jest prosta prostopadła do osi *OX*, do której należy wierzchołek paraboli,
3. współrzędne drugiego punktu przecięcia wykresu funkcji z osią *OX* można obliczyć wykorzystując os symetrii paraboli.

| | | |
|---|---|---|
| **standard** | odczytuje informacje ilościowe oraz jakościowe z tabel, diagramów i wykresów | II. 2. b |
| **opis wymagań egzaminacyjnych** | zdający potrafi: odczytywać własności funkcji kwadratowej z jej wykresu | III. 2. d |

**Schemat oceniania**

| **Etapy rozwiązania zadania** | **Liczba punktów** |
|---|---|
| wykorzystanie własności osi symetrii paraboli do wyznaczenia drugiego miejsca zerowego funkcji | 1p |
| zapisanie zbioru rozwiązań nierówności | 1p |

**Zadanie 2.** ***(3 pkt)***
Równanie

$$x^4+2x^3-13x^2+2x+1=0$$

można rozwiązać w następujący sposób. Wiadomo, że $x=0$ nie jest rozwiązaniem tego równania, możemy więc podzielić obie strony równania przez $x^2$. Otrzymujemy równanie

$$x^2+2x-13+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

które zapisujemy w postaci:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-15=0.$$

Równanie to rozwiązujemy wykorzystując podstawienie $x+\frac{1}{x}=t$. Rozwiązaniem równania $t^2+2t-15=0$ są liczby $t_1=3$ oraz $t_2=-5$.

Zatem $x+\frac{1}{x}=3$ lub $x+\frac{1}{x}=-5$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań równania jest $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{-5-\sqrt{21}}{2},\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Stosując wyżej opisaną metodę postępowania rozwiąż równanie

$$x^4-x^3+10x^2-x+1=0.$$

| | | |
|---|---|---|
| **standard** | stosuje przedstawiony algorytm do rozwiązania problemu praktycznego lub teoretycznego | II. 1. b |
| **opis wymagań egzaminacyjnych** | zdający potrafi:<br>rozwiązywać równania wielomianowe | III. 5. d |

**Schemat oceniania**

| **Etapy rozwiązania zadania** | **Liczba punktów** |
|---|---|
| przekształcenie równania do postaci równania $at^2+bt+c=0$ | 1p |
| rozwiązanie równania kwadratowego | 1p |
| obliczenie pierwiastków równania stopnia czwartego i zapisanie odpowiedzi | 1p |

# ROZDZIAŁ II

Aktualnie obowiązującym dokumentem jest *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 26 lutego 2002 roku w sprawie podstawy programowej(...) kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół.* Dokument ten zawiera obowiązkowe, na odpowiednim etapie kształcenia: cele edukacyjne, zadania szkoły, treści nauczania oraz osiągnięcia uczniów kończących dany etap edukacyjny.
Analiza *Podstawy programowej* jest konieczna zarówno przy wyborze programu, według którego będziemy uczyć, jak i przy tworzeniu własnego, autorskiego programu. Szczególną uwagę należy zwrócić na nowe treści nauczania. W obowiązującej *Podstawie programowej* takimi zupełnie nowymi treściami są między innymi:

- pojęcie błędu przybliżenia, szacowanie wartości liczbowych,
- procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów,
- elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).

Poniżej publikujemy artykuł doktora hab. Michała Szurka z Wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego **Elementy matematyki finansowej.** Będzie on, z pewnością, pomocą przy realizowaniu odpowiednich treści nauczania.

## ELEMENTY MATEMATYKI FINANSOWEJ W GIMNAZJUM I LICEUM

*Michał Szurek*

Po wielu latach, a nawet dziesięcioleciach, do szkół wraca matematyka finansowa. W programach i podręcznikach jest coraz więcej prostych zadań typu *TVM (time-value-money).* Tak określamy zadania, w których pamiętamy o podstawowym założeniu matematyki finansowej: wartość pieniędzy jest zmienna w czasie. Nie tylko przez inflację, ale też – a nawet przede wszystkim – z tego powodu, że posiadanymi środkami finansowymi nieustannie obracamy. Inwestujemy, gramy na giełdzie, spekulujemy (to ostatnie słowo odzyskuje swoje dawne, neutralne znaczenie). Nasze pieniądze pracują. Dotyczy to nie tylko przedsiębiorców, lecz w pewnym sensie każdego z nas – każdego, kto ma rachunek w jakimkolwiek banku.

Artykuł ten ma formę „notatek z wykładu", konkretnie z wykładów, jakie miałem na spotkaniach z nauczycielami w Bielsku, Łodzi, Sosnowcu, Tychach, Warszawie i Żywcu latem i jesienią 2003 roku. Nie dzielę zagadnień na „gimnazjalne" i „ponadgimnazjalne". Taki podział jest dość umowny. Ponadto prezentowany tu materiał jest zbyt obszerny, aby być w całości wykorzystany w szkole. Każdy z elementów może być za to wykorzystany oddzielnie. Taki a nie inny wybór treści przeznaczony jest raczej dla nauczyciela, który – to truizm – ale warto o tym pamiętać, powinien mieć szerszą wiedzę niż uczeń.

1. Zacznijmy *pół żartem, pół serio*. Oto sytuacja, jak z życia, tylko nieco przesadzona i podkoloryzowana.

**Mleko kosztowało 1 zł i bułka 1 zł. Po zmianie cen bułka kosztuje 50 gr a mleko 2 zł. Ogólnie: podwyżka to, czy obniżka?**

- ✓ *Pani Jankowska: wczoraj kupowałam litr mleka i bułkę za 2 zł, dziś muszę wydać 2 zł 50 gr. Podwyżka o 25 %.*
- ✓ *Pani Kowalska: Bułkę na litr mleka?? U mnie do litra mleka kupuje się 5 bułek. Wczoraj 6 zł, dzisiaj 4 zł 50 gr. Obniżka o 25 %.*
- ✓ *Pan Jankowski: rację ma moja żona. Dzisiejsza cena mleka to 200 % wczorajszej, dzisiejsza cena bułki to 50 % wczorajszej. Średnio dzisiaj = 125% * wczoraj, czyli podwyżka o 25 %.*
- ✓ *Pan Kowalski: rację ma moja żona. Wczorajsza cena mleka to 50 % dzisiejszej, wczorajsza cena bułki to 200 % dzisiejszej. Czyli wczoraj = 125 % * dzisiaj, obniżka o 25 %.*

2. Matura sprzed 123 lat. Warto, naprawdę warto, przyjrzeć się zadaniu, jakie w 1881 roku uczniowie klas VIII gimnazjów Okręgu Naukowego Warszawskiego rozwiązywali na egzaminie maturalnym. Warto zadumać się nad... zmianą poziomu egzaminu dojrzałości...

**0,46666... sumy otrzymanej ze sprzedaży weksla 36000 rs. z potrąceniem 8 % za 9 miesięcy przed terminem, użyto na kupno lasu prostokątnego o długości 768 sążni, szerokości 175 sążni. Za resztę otrzymanych pieniędzy kupiono dom; dochód z domu za trzy miesiące stanowi tyle rubli, ile zapłacono za dziesięcinę lasu. Obliczyć, jaki procent przynosi kapitał użyty na kupno domu.**

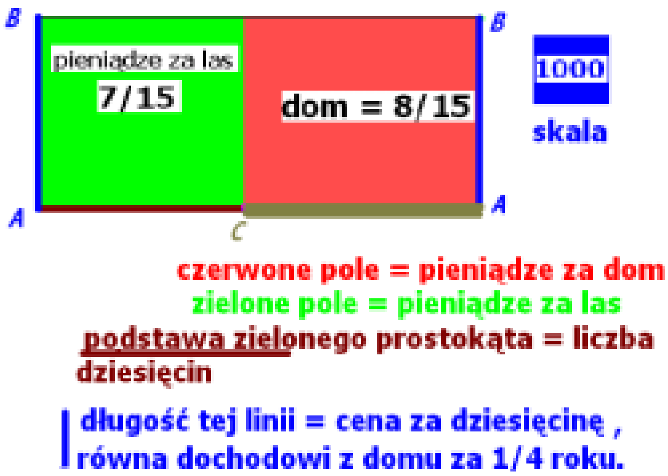
*Do zadania nie było dołączone niezbędne dziś wyjaśnienie, że dziesięcina to 2400 sążni kwadratowych.* Widocznie wtedy każdy maturzysta w państwie carów musiał to znać.

> Warto przypomnieć, co to jest weksel. Jest to papier wartościowy. Wystawca weksla otrzymuje od kupującego określoną sumę pieniędzy a w terminie oznaczonym na wekslu (termin wykupu) ma zwrócić pieniądze, zwykle więcej niż pożyczył. Przed tym terminem wystawca nie ma obowiązku wykupienia weksla. Dlatego weksel ma wtedy mniejszą wartość niż w dniu wykupu.

Rozwiążmy to zadanie prawie według standardów matury 2005. Będziemy szukać odpowiedzi na kolejne naturalne pytania.

- ✓ *Ile otrzymano za weksel?*
- ✓ *Odp. $3600 \cdot 0{,}92 = 33120$ [rubli srebrem]. Zamieniam teraz 0,46666... na ułamek zwykły, sumując odpowiedni szereg geometryczny. Odpowiedź: 7/15.*
- ✓ *Za ile kupiono las?*
- ✓ *Odp.: $7/15 \cdot 33120 = 15456$ [rubli srebrem].*
- ✓ *Ile dziesięcin miał las?*
- ✓ *Odp.: $(768 \cdot 175)/2400 = 56$. Ile płacono za dziesięcinę lasu?*
- ✓ *Odp.: $15456/56 = 276$. To jest dochód z domu za 3 miesiące.*
- ✓ *Obliczam dochód z domu za rok. $276 \cdot 4 = 1104$ [rubli srebrem]. Za ile kupiono dom?*
- ✓ *Odp.: $33120 – 15456 = 17664$. To jaki to procent?*
- ✓ *Odp.: $1104/17664 = 1/16 = 6{,}25$ %. Kapitał użyty na kupno domu przynosi dochód 6,25% w skali rocznej.*

3. Mamy już XXI wiek. Rozwiążmy zadanie maturalne z 1881 roku inaczej. Jeżeli długość podstawy prostokąta wyraża ilość (wielkość) towaru, który kupujemy, a wysokość jest równa cenie za jednostkę tego towaru, to pole prostokąta o danych wymiarach jest równe sumie pieniędzy, jakie wydamy na zakup. Pamiętając o tym, zróbmy taki rysunek. Prostokąt wyobrażający sumę pieniędzy przeznaczoną na dom i las dzielimy, zgodnie z warunkami zadania, w stosunku 7:8.




Niezależnie od wielkości potrącenia (dyskonta), ta proporcja 7:8 jest zachowana. Zachowuje się też długość obu odcinków, oznaczonych na rysunku przez *AC*. „Lewy" ma zawsze długość 56 (liczba dziesięcin). Zatem „prawy" ma długość $56 \cdot 8 / 7 = 64$. Możemy powiedzieć, że prostokąt przekształca się przez powinowactwo osiowe. Dochód z domu za rok jest równy $4 \cdot AB$ , zgodnie z warunkami zadania. Aby obliczyć, jaka to część kapitału, dzielimy ten dochód przez pole prostokąta symbolizującego sumę pieniędzy wydaną na dom. Ale pole prostokąta dzielone przez jego wysokość to długość podstawy! Zatem kapitał użyty na kupno domu przynosi dochód 4/64 = 1/16 , czyli – jak poprzednio – 6,25%! Odkryliśmy też, że procent ten nie zależy od wielkości dyskonta.

4. Wycieczka w XIX wiek. Możemy wykorzystać to zadanie do wycieczki w przeszłość. Historycznie *sążeń* to szerokość rozkrzyżowanych rąk (stąd nazwa, od *sięgać*). Jak zwykle, w dawnych czasach niemal każdy powiat miał swoje własne miary. W zaborze rosyjskim na ziemiach polskich dekretem z 1849 roku wprowadzono *sążeń rosyjski*. W układzie metrycznym był on równy 2,1336 m. Proponowane niżej zadanie przeliczenia dziesięciny na hektary wcale nie będzie łatwe dla uczniów gimnazjów, nawet jeśli – co polecam – użyją kalkulatora.

1 sążeń = 3 arszyny = 7 stóp = 48 werszków =
= 84 cale = 2,1336 metra.
!!! Zad. Wiedząc, że 768 x 175 sążni to 56 dziesięcin, oblicz, ile ha miała dziesięcina!

5. Cambio. Znaczenie tego słowa znane jest turystom. To po włosku wymiana pieniędzy. Zobaczmy, że już 350 lat temu zagadnienia matematyki finansowej były doceniane w nauczaniu matematyki. Cytujemy z książki: *Krzysztof Schedel, Arytmetyka, to jest nauka rachunku,* 1653.

**Cambio Commune jest to pospolite zamienienie monety różnej jednego miasta.**
**Cambio reale jest zamienienie pieniędzy jednej krainy do drugiej albo jednego miasta do drugiego; jako to gdyby ja tu w Krakowie jednemu summę wyliczywszy na to, aby mi była taż summa w Wenecyjej albo w inszych miastach, przez niego albo przez jego correspondenty wyliczona była. (...). Item kupiec jeden w Krakowie bierze cambium do Wenecyjej na 3000 złotych polskich po 391 złotych per 100 dukatów correnti, których jeden 2 ½ naszych złot. czyni: wiele tedy dukatów w cambium położyć mają, które w Wenecyjej będzie odebrać powinien?**

Zachwyćmy się tą składnią: *będzie odebrać powinien*. Ale powtórzmy pytanie: wiele dukatów w cambium położyć mają? Odpowiedź: $767\frac{103}{391}$.

A prawdziwe zadanie dla Czytelników: przerobić to wszystko na standardy matury 2005.

6. Jeszcze jedno zadanie Schedla, *op. cit.*
   **Matrona jedna u męża godnego**
   **300 grzywien pieniędzy dla zarobku swego**
   **Wyprosiła. Kupuje lnu dostatkiem za to,**
   **Daje prząść, ofiarując zapłacić bogato.**
   **3 sztuki otrzymuje z przędziwa swojego –**
   **Płótno roboty dobrej gatunku cienkiego.**
   **Każda sztuka o 79 3/4 łokciach była,**
   **Każdy łokieć po 12/3 grzywnie za pieniądze zbyła.**
   **No teraz jest moje pytanie:**
   **Co za zarobek wzięła za nie ?**

Odpowiedź: 98 ¾ grzywny.

7. Wiele może mieć małdrów? Pierwszą polską książką matematyczną jest podręcznik księdza Tomasza Kłosa *Algoritmus to jest nauka liczby* (1538). Pytanie kontrolne: z którego roku pochodzi *Krótka rozprawa między panem, wójtem i plebanem?* Z książki Kłosa dwa takie oto zadania. Pierwsze jest proste, przepisujemy starannie:
   **Dworzka liczba. Krol nasz miłościwy Sigmunt: odloził 473005 zło. na obronę sławnego Krolestwa Polskiego za które chce mieć iezdnych 3880 A pieszych 750 dawaiąc każdemu iezdnemu na miesiąc 4 zło. á pieszym 5 zło. Iest pytanie iako wiele miesięczy może ie trzymać.**

Oto drugie. Bez komentarza.

**O zbożu. 12 czwircień w małdr. Ieden naloził na zboże 128 mrc. 1 czwiertnia po 13 ½ g. Wiele może mieć małdrów?**

A oto i odpowiedź: 37 małdrów 11 czwircień 1/9 . Prawda, jakie to... musiało być trudne?

8. Zostańmy w naszym, jako tako oswojonym świecie XXI stulecia.

W szkole omawiamy następujące typy zadań na procent prosty. Wiele z nich ma aspekt finansowy:
- wyznaczanie jakim % jednej liczby jest inna,
- wyznaczanie liczby, będącej danym % innej,
- wyznaczanie liczby z jej %,
- obniżki i podwyżki (w tym kolejne).

Dobrze by było, gdyby uczniowie gimnazjum i liceum zrozumieli znaczenie wielu z następujących terminów: (to zresztą jest minimum wiadomości, jakie każdy z nas powinien mieć na temat matematyki spraw finansowych).

wartość przyszła i obecna;
stopa % (nominalna, efektywna),
kapitalizacja, dyskontowanie, zadania;
podatki, płaca brutto i netto;
inflacja;
saldo, debet, kredyt i sposoby jego spłat;
weksle, akcje i obligacje;
stopa zwrotu, przychód, dochód, zysk.

**Dla celów szkolnych taka lista jest za długa,** wybór zależy od sytuacji w poszczególnych szkołach i klasach. Również za obszerne są przedstawione niżej propozycje dziesięciu grup tematycznych (zwę je *motywami*) dotyczące matematyki finansowej w szkole. Każda ma jednak pewien urok. Tematy „inflacja" i „kredyty" są ważne na co dzień. Nazwę „kapelusz na stole" wyjaśniam w odpowiednim miejscu. „Stałe płatności" to dobre zadania na szereg geometryczny, a w wyprowadzeniu wzoru na wielkość stałej raty posługujemy się bardzo ciekawa (choć skomplikowaną) indukcją. Wreszcie, w temacie „stopa zwrotu" dochodzimy do naturalnych (a także maturalnych) zadań o wielomianach. Dzięki interpretacji „finansowej" możemy lepiej zrozumieć wprowadzenie liczby **e**, a także rozwiązać z pozoru trudne zadanie o równaniach kwadratowych. To tylko drobny przejaw tego, że „prawdziwa" matematyka finansowa sięga do wielu z pozoru odległych dyscyplin matematyki współczesnej.

**Grupy tematyczne („motywy") zadań z matematyki finansowej w szkole.**
W każdej z grup omówiono po kilka zadań.

1. **Zmiany cen, I. Obniżki i podwyżki.**
2. **Zmiany cen, II. Zmiany cen zestawów.**
3. **Inflacja.**
4. **Terminologia. Kapelusz na stole.**
5. **Stopa nominalna i efektywna.**
6. **Kredyty, odsetki.**
7. **Skomplikowane rachunki bankowe.**
8. **Stałe płatności.**
9. **Stopa zwrotu.**
10. **Procenty i podatki.**

## Motyw 1. Obniżki i podwyżki

Zadanie 1. **Towar taniał o 30%, 15%, 10%, 5%. O ile staniał? Jaka była średnia obniżka?**
15% ? NIE.
Rozwiązanie. Oto historia ceny początkowej $c$:
$c \to 0,7c \to 0,85\cdot 0,7c \to 0,9\cdot 0,85\cdot 0,7c \to 0,95\cdot 0,9\cdot 0,85\cdot 0,7c = 0,508725c \approx 0,51c$.
*Kosztuje zatem **51** procent tego, co dawniej. Zatem staniał o...*
Tak jest, o **49** procent!
Średnia obniżka to nie 15 procent! Bo gdyby tak było, to kosztowałby
$0,85^4 \cdot c = 0,52200625\cdot c \approx \mathbf{0,52}\cdot c$.

*Prawidłowa odpowiedź:* $1 - \sqrt[4]{0,7\cdot 0,85\cdot 0,9\cdot 0,95} = 15,5\,\%$

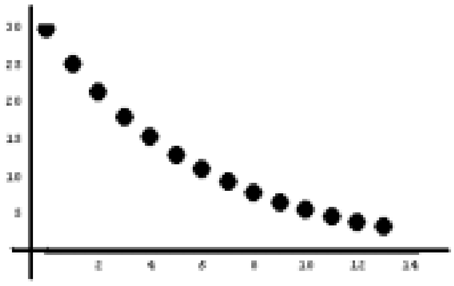
Zadanie 2. **Bilet ze zniżką 49% kosztuje 49 zł. Ile kosztuje bilet ze zniżką 51% ?**
Rozwiązanie (szkic).
Pełny bilet = 49/0,51 = 96,08 zł. Bilet ze zniżką 51% kosztuje więc $96,08 \cdot 0,49$ = 47,08 zł.

Zadanie 3. **Ubezpieczenie samochodu kosztuje 1000 zł, ale firma daje rabat 50% za bezszkodowość i 10% za kontynuację. Jak obliczyć składkę?**
Uwaga. *Nie można oczywiście sumować procentów, ale można obniżki obliczać w dowolnej kolejności.*

Odp.: 450 zł.

Zadanie 4. **Samochód traci rocznie 15% wartości. Ile jest wart po 5 latach samochód, który nowy kosztował 30000 zł?**

Odp.: $0,85^5 \cdot 30000$ zł = 13311 zł 16 gr.



**Po ilu latach wartość spadnie poniżej 6000 zł?**

Odp.: Po 10 latach.

**Sporządzić wykres spadku wartości samochodu.**

## Motyw 2. Zmiany cen zestawów

Zadanie 5. **Zestaw *komputer, drukarka i oprogramowanie* zmienił cenę. Komputer zdrożał o 10%, drukarka o 15% , a oprogramowanie staniało o 25%. Jak zmieniła się cena zestawu?**

> Uwaga. *Tak sformułowane zadanie jest złe! Odpowiedź zależy od proporcji cen między tymi przyrządami. Łatwo to zrozumieć, wyobrażając sobie, że do drogiego komputera dokupujemy bardzo tanie oprogramowanie. Wtedy wahania cen oprogramowania bardzo niewiele wpływają na łączną cenę zestawu.*

Przyjmijmy cenę komputera 3000 zł, drukarki 1500 zł, oprogramowania 2000 zł. Jeżeli komputer zdrożał o 10 %, drukarka o 15%, to o ile procent trzeba obniżyć cenę oprogramowania, żeby cena zestawu się nie zmieniła?

Zadanie ogólniejsze. **Przyjmijmy cenę komputera 3000 zł, drukarki 1500 zł, oprogramowania 2000 zł. Jeżeli komputer zdrożał o *x* %, drukarka o *q* = 10%, to o ile procent trzeba obniżyć cenę oprogramowania, żeby cena zestawu się nie zmieniła? Zrób wykres odpowiedniej funkcji.**

Rozwiązanie: Oznaczmy szukaną wielkość przez $y$. Zestaw kosztuje teraz

$$(1+x/100)\cdot 3000 + 1650 + (1 - y/100)\cdot 2000.$$

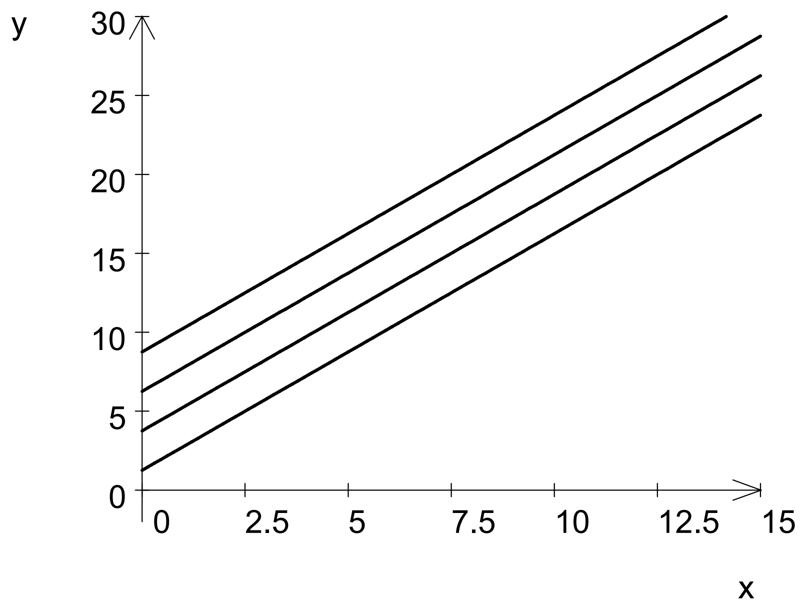
To ma być równe 6500 zł. Stąd $\mathbf{y = (3x + 15)/2}$.

Dla danych ogólnych mamy

$$(1+x/100)\cdot 3000 + 1500(1+ q/100) + (1 - y/100)\cdot 2000.$$

To ma być równe 6500 zł. Otrzymujemy: $\mathbf{y = (6x + 3q)/4}$.

Pouczające będzie zilustrowanie tego wykresem. Chodzi o inteligentny dobór parametrów rysunku, opisy osi itp. Szkicowy wykres jest jak niżej:




## Motyw 3. Inflacja

Zadanie 6. **W pierwszym półroczu inflacja wyniosła 2 procent a w drugim 1 procent. Jaka była roczna inflacja?**
Rozwiązanie. Przypomnijmy, jak się oblicza inflację. Dwuprocentowa inflacja w skali półrocznej znaczy, że to, co kosztowało złotówkę, po pół roku miało cenę 1,02 zł, a po następnych sześciu miesiącach $1{,}02 \cdot 1{,}01 = 1{,}0302$. Inflacja wyniosła zatem trochę więcej niż 3 procent. Gdyby pierwsza inflacja była 8 procent, a druga 12 procent, to roczna byłaby równa 21 procent, a nie 20.
Zadanie 7. **Ile będzie warte 1000 zł złożone w banku na rok na 4%, jeżeli inflacja roczna jest równa 2% ?**
To jest inne zadanie niż poprzednie. Jeszcze raz przypomnijmy, że inflacja 2% znaczy, że to, co kosztowało $x$, kosztuje teraz $\mathbf{1{,}02} \cdot x$. A co kosztowało 1000 zł, będzie 1020 zł.
Jednocześnie w banku 1000 zł zostanie ***skapitalizowane*** do 1040 zł.
**Ile warte jest 1000 złotych po roku**? Jeżeli np. coś kosztuje 1 grosz, to za 1000 złotych można kupić 100000 sztuk, a po roku za 1004 złote można kupić 1004/1002 = 100199. Owe 1000 złotych po roku będzie warte 1001 zł 99 groszy.

### Rady i uwagi

- ➔ Inflacja *p* procent znaczy, że to co kosztowało *c*, kosztuje teraz o *p procent więcej*, tj. (1+*p/100*)*c* .
- ➔ *Dlatego używajmy* ***czynnika procentowego r = 1 + p/100****.*
  *W zadaniu powyżej jest on równy r = 1,02.*
- ➔ *Złotówka po roku jest warta* **1/*r*** !!!! To jest ***dyskontowanie***.
  Bo to, co kosztowało 1 zł, teraz kosztuje *r*.
- ➔ Odróżniajmy procent od punktu procentowego! Jeżeli inflacja była równa 2 procent i spadła do jednego procenta, to spadła o pięćdziesiąt procent, ale o jeden punkt procentowy!

Zadanie 8. **W warunkach pracy mam zagwarantowane, że moja płaca będzie rosła w tempie o jeden punkt procentowy ponad poziom inflacji. Jak rośnie moja siła nabywcza?**
Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie towar, który kosztuje złotówkę za sztukę, gdy ja zarabiam $c$ złotych. Inflacja $p$ procent znaczy, że cena towaru się zmieni do $1+ p/100$ złotych. Moje zarobki wyniosą wtedy $c\,(1 + (p+1)/100)$ złotych i będę mógł za nie kupić $c\,(1 + (p+1)/100)/(1+ p/100)$ sztuk tego towaru. Moja siła nabywcza wzrośnie więc $\frac{1+\frac{p+1}{100}}{1+\frac{p}{100}} = 1+\frac{1}{100+p}$ raza. Na przykład, gdy $p = 2$ (inflacja 2 procent), to moja siła nabywcza wzrasta „tylko" 1,0098 raza. W warunkach hiperinflacji jest jeszcze gorzej. Dla $p = 100$ (koszty rosną dwukrotnie), ja zarabiam efektywnie więcej tylko 1,005 raza.

## Motyw 4. Terminologia

| | |
|---|---|
| Widzimy obok wzór na procent prosty: i na procent składany. Obydwa mogą być zapamiętane jako *kapelusz na stole.* | $k \to kpl/100$ <br> $k \to k\left(1+\frac{p}{100}\right)^l$ |

Wzór na procent składany w innych oznaczeniach, używanych np. w kalkulatorach: (WP = wartość przyszła, WB = wartość bieżąca, zwana też wartością obecną) $\mathbf{WP}=\mathbf{WB}\cdot r^n$
Po angielsku (future value, present value): $\mathbf{FV}=\mathbf{PV}\cdot r^n$
Kapitalizacja i dyskontowanie to przeliczanie, odpowiednio, wartości obecnej na przyszłą i przyszłej na obecną. A zatem dyskontujemy według wzoru $s \to s/r^n$ .

Zadanie 9. **W 1626 roku Holender Peter Minuet kupił od Indian cały Manhattan za paciorki wartości \$24. Ile mieliby Indianie teraz, gdyby te pieniądze złożyli w banku na *p* procent?**
Zadanie to jest proste. Do rozwiązania potrzebny jest kalkulator, mający potęgowanie. Warto rozwiązać zadanie dla różnych stóp procentowych. Osiągamy przy tym następujące cele:
1) pokazujemy uczniom, jak bardzo stan naszego konta przy długoterminowych lokatach zależy od procentu, na jaki składamy pieniądze;
2) uczymy posługiwania się kalkulatorem,
3) omawiamy funkcję wykładniczą (jeżeli chcemy),
4) omawiamy z uczniami, jak nieżyciowa jest opisana w zadaniu sytuacja i między innymi, że trzymanie pieniędzy w banku jest jedną z najgorszych form ich użycia. Poniższa tabela podaje stan konta Indian po złożeniu pieniędzy na podany procent. Widzimy, że oprocentowanie 6% przyniosłoby prawie 100 miliardów dolarów.

| | |
|---|---|
| 1 | 1052,77 |
| 2 | 44491,45 |
| 3 | 1812828,12 |
| 4 | 71265637,63 |
| 5 | 2704860602,73 |
| 6 | 99183639918,38 |

## Motyw 5. Stopa nominalna i efektywna

Zadanie 10. **Stopa procentowa dla lokat w SuperBanku wynosi 6% w stosunku rocznym. Zatem lokata roczna 1000 zł przynosi po roku 60 zł. Zakładamy lokatę kwartalną, odnawialną w wysokości 1000 zł. Ile mamy po roku?**

Odp.: Stopa kwartalna to 1,5 %. Zatem po roku mamy $\mathbf{1000 \cdot 1{,}015^4 = 1061{,}36}$ zł.

A zatem **nominalna** stopa **6%** przy kwartalnej kapitalizacji daje stopę **efektywną 6,136%.**

## Finansowe wprowadzenie liczby e.

**Czynnik procentowy:** $r = 1 + p/100$. $k \to k * r$ . Pewien bank daje 100 procent odsetek. Złotówka po roku stanie się 2 zł.
Stopa kwartalna = 25 %. Złotówka po kwartale -> 1,25 zł,
po roku $1{,}25^4$ = 2 zł 44 gr.
Stopa miesięczna = 8,3333... %. Złotówka po miesiącu -> 1,08333... zł,
po roku $1{,}08333...^{12}$ = 2 zł 61 gr.
Stopa dzienna: 100/365 procenta = 0,27397... procenta. Po roku $1{,}00027397....^{365}$ = 2 zł 71 gr.
A przy stopie sekundowej? Po roku mamy $(1 + 1/31536000)^{31536000}$
Po $1/n$ – tej roku złotówka wzrośnie do $(1+1/n)^n$

Zatem **e** to granica wzrostu, czyli:

**efektywny czynnik procentowy odpowiadający ciągłej kapitalizacji przy nominalnej stopie 100%.**

## Motyw 6. Kredyty, odsetki

**Zasada: odsetki obliczamy od niespłaconej części kredytu!**

Zadanie 11. **Sporządzić *plan amortyzacji* kredytu 1600, wziętego na 12% na dwa lata ze spłatą kwartalną wg zasady stałych rat kapitałowych.**

| | Kredyt | Rata kredytu | Odsetki | Spłata |
|---|---|---|---|---|
| Kwartał 1 | 1600 | 200 | 48 | 248 |
| Kwartał 2 | 1400 | 200 | 42 | 242 |
| Kwartał 3 | 1200 | 200 | 36 | 236 |
| Kwartał 4 | 1000 | 200 | 30 | 230 |
| Kwartał 5 | 800 | 200 | 24 | 224 |
| Kwartał 6 | 600 | 200 | 18 | 218 |
| Kwartał 7 | 400 | 200 | 12 | 212 |
| Kwartał 8 | 200 | 200 | 6 | 206 |
| | | | Suma spłat | 2216 |

**Efekt dźwigni.** Pożyczając na 12%, spłacamy
(2216-1600)/1600 = 616/1600 = 0,385 = 38,5 %

## Motyw 7. Skomplikowane rachunki bankowe

Zadanie 12. **Ulokowano pewną kwotę w dwóch bankach. Po roku, po uwzględnieniu 20% podatku od odsetek, odebrano z obu banków 26 960 zł. Oblicz kwotę każdej lokaty, jeżeli roczna stopa procentowa w pierwszym banku była równa 5%, w drugim 4% i jeżeli kwota odsetek w pierwszym banku była dwa razy większa niż kwota odsetek w drugim banku.**

Rozwiązanie. Najpierw wyliczmy czynnik procentowy po uwzględnieniu podatku od odsetek:

- $1{,}05 \cdot 0{,}8 = 1{,}04$; **(stopa 5% -> 4%)**
- $1{,}4 \cdot 0{,}8 = 1{,}032$; **(stopa 4% -> 3,2%)**
- Oznaczmy lokaty przez $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$
- Teraz mamy układ równań:

$$1{,}04\,\boldsymbol{x} + 1{,}032\,\boldsymbol{y} = 26960, \quad 0{,}05\,x = 2 \cdot 0{,}04\,\boldsymbol{y}$$

Odp.: **$x = 16000$ zł, $y = 10000$ zł.**

Komentarz: **Bardzo wielu osobom (nie tylko uczniom) z trudem przychodzi zrozumienie faktu, że odjęcie od liczby jej 20 procent to to samo, co pomnożenie jej przez 0,8. Musimy oczywiście o tym pamiętać.**

Zadanie 13. **ODROCZONA PŁATNOŚĆ. Sieć dużych sklepów (zwanych w kiepskiej polszczyźnie hipermarketami) oferuje różne formy zapłaty za komputer. Mamy trzy możliwości:**

**1)** albo zapłacić teraz **8600** zł gotówką,
**2)** albo płacimy teraz **4600** zł i za rok **4600** zł.
**3)** albo teraz nie płacimy nic, za rok **5290** zł i po dwóch latach **5290** zł.

**Wybierając drugie lub trzecie wyjście, *de facto* dostajemy więc kredyt. Wyznaczyć jego stopę.**

Płacąc tak, jak w sposobie nr 2, dostajemy 4000 zł kredytu, który spłacamy kwotą 4600 zł. Zatem stopa procentowa tego kredytu jest równa = (4600-4000)/4600 = 600/4000 = **15%.**
Niech $r$ będzie czynnikiem procentowym odpowiadającym szukanej stopie procentowej kredytu, który otrzymujemy wybierając trzecią możliwość Dyskontujemy przyszłe płatności. Mamy zależność:

**$8600 = 5290 / r + 5290 / r^2$**

**$860\, r^2 - 529\, r - 529 = 0$.** Rozwiązujemy: **$\Delta = 529^2 + 4 \cdot 860 \cdot 529 = 1449^2$**

**Stąd $r = 1{,}15$. Stopa kredytu 15%**

**Obydwa sposoby ratalne są według stopy 15%.**

## Motyw 8. Stałe płatności

### RENTA (= STAŁA PŁATNOŚĆ)

W powieściach francuskich występuje czasami słowo rentier. Jest to osoba otrzymująca regularne zyski z pieniędzy ulokowanych w banku. Dlatego regularne wypłaty (w tej samej wysokości i w równych odstępach czasu) nazywamy rentą. Nie jest to najlepszy termin, ale lepszy niż niekiedy używany potworek językowy *annuita.* Dla wpłat używamy zrozumiałego terminu płatność. Matematycznie renta i płatność to to samo. Co bowiem dla jednego jest rentą, dla drugiego jest płatnością. Rozróżniamy oczywiście płatności z góry (na początku miesiąca czy roku) i z dołu (na końcu). Matematycznie rzecz biorąc, wszelkie stałe *przepływy pieniężne* to renta; w tym i nasza pensja za pracę.

Zadanie 14. **Wpłacamy po 100 zł miesięcznie na $p = 12\%$ (w skali rocznej). Ile mamy po 5 latach?**

Rozwiązanie. Niech jak zwykle $r = 1+p/100$. *U nas*: 1 % miesięcznie.

Dla płatności z góry (na początku miesiąca) mamy szereg

$100r^{60} + 100r^{59} + \ldots + 100\, r = \ldots$ ***u nas*** ...= 8248,64 zł.

Dla płatności z dołu (na końcu miesiąca) mamy szereg

$100r^{59} + 100q^{58} + \ldots + 100\, r + 100 = \ldots$ ***u nas*** = ... 8166,97 zł.

Zadanie 15. **Renta wieczysta: Niech stopa procentowa = *p*. *W*yznaczyć wartość bieżącą renty wieczystej 100.**

Rozwiązanie. Renta wieczysta to stała płatność, bez oznaczonego terminu końca. Wyobraźmy sobie na przykład, że bogaty wujek postanowił wypłacać siostrzeńcowi po 100 euro miesięcznie. Jaś chciałby mieć jednak większą sumę od razu. Może ją bowiem zainwestować w intratne przedsięwzięcie, z którego będzie przez długi czas czerpać zyski większe niż 100 miesięcznie. Wbrew pozorom, wartość bieżąca renty wieczystej nie jest nieskończona i to nie z powodu ograniczoności czasu trwania życia ludzkiego (na tej Ziemi, ale w niebie/piekle/czyśćcu podobno i tak nie myśli się o pieniądzach). Wartość bieżąca renty wieczystej to bowiem suma szeregu geometrycznego nieskończonego o ilorazie $1/r$ , gdzie $r$ jest czynnikiem procentowym. Na przykład dla $p = 5\%$ mamy $r = 1{,}05$, więc wartość renty wieczystej **100** jest równa

$$\mathbf{100/(1 - 1/\mathit{r}) = 100/(1 - 1/1{,}05) = 100/(1 - 100/105) = 100/(5/105) = 100 \cdot 21 = 2100.}$$

## SPŁATA KREDYTU METODĄ STAŁYCH RAT

$\boxed{r = 1 + p/100 \text{ to czynnik procentowy zatem } K \text{ -> } K(1+p/100) = Kr}$

Twierdzenie. Jeżeli pożyczamy ***K*** na ***p*** procent na ***n*** lat (okresów) i chcemy spłacać po tyle samo, to : wielkość stałej raty jest równa

$$Kr^n\,(r - 1)/(r^n - 1)$$

a po ***k***-tym roku (okresie) zostaje do spłaty

$$Kr^k - Kr^n\,(r^k - 1)/(r^n - 1)$$

kapitału.

Dowód: Indukcja względem ***k***. Dla ***k*** = 0 twierdzenie jest prawdziwe.

Krok indukcyjny: dług po ***k*** latach $Kr^k - Kr^n\,(r^k-1)/(r^n-1)$

stanie się $(Kr^k - Kr^n\,(r^k-1)/(r^n-1))\,r$, a po zapłaceniu raty

$$(Kr^k - Kr^n\,(r^k-1)/(r^n-1)\,)\,r - Kr^n\,(r-1)/(r^n-1) = \ldots = Kr^{k+1} - Kr^n\,(r^{k+1}-1)/(r^n-1)$$

Uwaga. Omówiona tu metoda stałych rat (stałych spłat) to nie to samo, co metoda stałych rat kapitałowych, gdzie spłacamy za każdym razem taką samą część kapitału, a coraz mniejsze odsetki.

Zadanie 16. **Wyliczyć wielkość stałej raty miesięcznej przy spłacie kredytu 100000 złotych wziętego na 12% w skali rocznej na 5 lat.**

Rozwiązanie. We wzorze z powyższego twierdzenia mamy ***K*** = 100000, ***r*** = 1,01, ***n*** = 60. Wyliczamy stąd, że wielkość raty jest równa 2224 zł 44 grosze. Płacąc tyle przez 5 lat, zanosimy do banku łącznie 60·2224,44 = 133466 zł 40 groszy, czyli spłacamy ponad 33% procent więcej (efekt dźwigni).

Zadanie 17. (por. z zadaniem 11.) **Obliczyć wielkość stałej raty kredytu 1600 zł, wziętego na 12% na dwa lata ze spłatą kwartalną według zasady spłat w równej wysokości.**

Odp.: Jest ona równa $1600 \cdot 1{,}03^8 \cdot \dfrac{0{,}03}{1{,}03^8 - 1} =$ 227 zł 93 grosze.

Uwaga. *Niekiedy banki stosują inną metodę obliczania stałej płatności. Rozkładają mianowicie sumę wszystkich odsetek obliczanych według metody stałych rat kapitałowych równomiernie na wszystkie płatności. W sytuacji z zadania 11 byłoby tak. Suma wszystkich odsetek to 48 + 42 + 36 + 30 + 24 + 18 + 12 + 6 = 216 złotych, zatem do każdej raty kapitałowej 200 dodajemy 216/8 = 27 złotych. Zatem stała spłata jest równa 227 złotych, mniej niż w metodzie, która jest „bardziej poprawna" matematycznie. Dlaczego słowa „bardziej poprawna" są w cudzysłowie? Dlatego, że sposób naliczania odsetek jest sprawą umowy między bankiem a klientem. Jeśli klient podpisze umowę, w której będzie jawnie napisane, że przy obliczaniu odsetek bank stosuje regułę „dwa razy dwa jest równe pięć" , to ... jego strata.*

## Motyw 9. Stopa zwrotu

Jeżeli inwestujemy pewną sumę pieniędzy w przedsięwzięcie, z którego po krótkim czasie – teoretycznie natychmiast – otrzymujemy zysk, to stosunek wielkości tego zysku do zainwestowanej sumy (wyrażony w procentach) nazywamy stopą zwrotu z przedsięwzięcia. Jeżeli jednak zysk jest odległy w czasie, sprawa obliczenia stopy zwrotu jest bardziej skomplikowane. Musimy pamiętać, że wartość pieniędzy (ekonomiści używają tu liczby pojedynczej: wartość pieniądza, co nie jest poprawnie po polsku) jest zmienna w czasie. Nie chodzi tylko o inflację, lecz głównie możliwość reinwestowania otrzymanych dochodów.

Zadanie 18. **Inwestycja 100 zł przyniosła po roku dochód 80 zł, po drugim roku 48 zł. Wyznaczyć stopę zwrotu.**


**28 % ? Nie!!!**

Musimy pamiętać, że 48 zł za dwa lata to nie to samo, co teraz.

Dyskontowanie to dzielenie przez $r$.

A więc **80** zł za rok to **80/*r*** teraz!

Oznaczmy roczny czynnik procentowy przez $r = 1 + p/100$.

Mamy równanie $\mathbf{100 = 80/r + 48/r^2}$ . Stąd $\mathbf{25r^2 - 20\,r - 12 = 0}$;

$\Delta = 400 + 48 \cdot 25 = 1600$, stąd $r = 6/5$ , bo $-2/5$ odrzucamy. Czyli $p = 1/5$.

Odp.: Stopa zwrotu jest równa 20%.

Zadanie 19. **Inwestycja 18 przynosi w kolejnych latach zyski 9, 17, 4. Wyliczyć stopę zwrotu.**

Szkic rozwiązania. Równanie $18\,r^3 - 9\,r^2 - 17\,r - 4 = 0$. Dodatni pierwiastek $r = 4/3$.

Zadanie 20. NIEOCZEKIWANE ZASTOSOWANIE MATEMATYKI FINANSOWEJ.

**Niech $a$, $b$, $c$ będą liczbami dodatnimi, takim, że $a < b+c$.**

**Wykazać, że równanie $ax^2 - bx - c = 0$ ma dwa pierwiastki, z których jeden jest ujemny, a drugi większy niż 1.**

Rozwiązanie (szkic). Inwestycja $a$ przyniosła dochód $b + c$, większy niż zainwestowana suma. Zatem stopa zwrotu jest dodatnia, zadanie rozwiązane.

## Motyw 10. Procenty i podatki

W tym punkcie podaję konkretną propozycję lekcji na temat podatków. Rzeczownik „lekcji” użyty jest tu w liczbie mnogiej (dawniej pisano konsekwentnie: lekcyj).
Poprzedzam to uwagami na temat zadań na procenty.

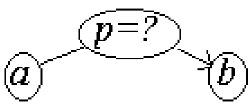
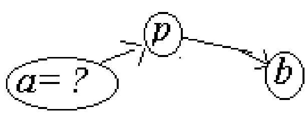
**Pułapki procentowe**. Warto sobie zdać sprawę z błędów przy posługiwaniu się obliczeniami procentowymi. Oto niektóre:

1. Obliczeń procentowych nie można stosować dla małych liczb. Jeżeli mam dwie córki i syna, to „matematycznie” będzie w porządku, jeżeli powiem, że około 66,67 procenta moich dzieci to córki, a 33,3333 to synowie, ale każdy zdaje sobie sprawę z absurdu takiego sformułowania.
2. Jeśli $a$ jest o $p$ procent większe od $b$, to $b$ nie jest o $p$ procent mniejsze od $a$. Zatem obniżka pensji o 20 % a potem podwyżka o 20 % nie wyrównuje nam straty.
3. Autentyczne! Mieszkam na osiedlu, złożonym z kilkunastu domów. Jest zatem kilku dozorców. Dozorca mojego domu poskarżył mi się: „na tablicy wisiała informacja, że wszyscy dostaniemy takie same premie, po 20 procent, a jak rozmawiałem z tym spod ósemki, to okazało się, że on dostał o 100 złotych więcej. Tak nas wszyscy na każdym kroku oszukują!”
4. Punkty procentowe a procenty. Jeżeli inflacja w kraju była równa, powiedzmy, 7 procent i zmalała do 6 , to nie zmalała o jeden procent a o jeden punkt procentowy.

Jak wiadomo, Stańczyk, błazen Zygmunta Augusta, wykazał, że najwięcej w Polsce jest lekarzy. Skarżył się każdemu przechodniowi na ból zębów i od prawie każdego otrzymywał inną poradę. Przypomina mi się to, gdy czytam zalecenia, jak uczyć o procentach i obliczeniach procentowych. Niemal każde opracowanie dydaktyczne zaleca co innego. Choć w I klasie liceum uczniowie powinni takie obliczenia wykonywać, to można i należy do tego wrócić. Proponuję taki

**Schemat rozwiązywania zadań na procenty**

W zdaniu `Liczba a jest to p procent liczby b` występują aż trzy zmienne: $a$ , $b$, $p$. Wszystkie zadania na procenty dzielą się zatem na trzy typy. W każdym z nich chodzi o wyznaczenie trzeciej zmiennej, gdy znane są dwie pozostałe. Konkretnie:

| Sformułowanie | Przykładowe zadanie | Rozwiązanie |
|---|---|---|
| Jakim procentem liczby $b$ jest liczba $a$ ?   | Powierzchnia Polski wynosi około 312 tysięcy km$^2$. Lasy zajmują 86 tysięcy km$^2$ . Jaki procent powierzchni Polski zajmują lasy? | $a$ =86, $b$ = 312, zatem $p = \frac{86}{312} \approx 0,276$, tzn. lasy zajmują ok. 27,6 procenta powierzchni Polski. |
| Dana jest liczba $b$ . Wyznaczyć liczbę $a$ , która stanowi $p$ procent liczby $b$ .   | Powierzchnia Polski wynosi około 312 tysięcy km$^2$. Lasy zajmują 27,6 procent tej powierzchni. Jaką powierzchnię zajmują lasy w Polsce? | Mamy obliczyć 27,6 procent liczby 312 . W schemacie widocznym w pierwszej kolumnie tabeli podstawiamy $p$ = 0,276, $b$ = 312, zatem $a = 0,276 \cdot 312 \approx 86$ (tysięcy km$^2$) |
| Dana jest liczba $a$ , która stanowi $p$ procent niewiadomej liczby $b$. Wyznaczyć liczbę $b$ .   | Lasy w Polsce zajmują obszar 86 tysięcy kilometrów kwadratowych i jest to 27,6 procenta powierzchni Polski. Ile kilometrów kwadratowych zajmuje powierzchnia Polski? | Mamy tutaj $a$ = 86, $p$ = 0,276, zatem $b = \frac{86}{0,276} \approx 312$ . |

5. Dwie firmy farmaceutyczne produkują dwa różne leki na tę samą dolegliwość. Wyniki badań statystycznych były następujące.

| | Leczeni | Poprawa | Skuteczność | Komentarz |
|---|---|---|---|---|
| **Lek A** | | | | |
| Mężczyzn | 210 | 50 | 24 % | |
| Kobiet | 40 | 30 | 75 % | |
| Ogółem | 250 | 80 | 32 % | |
| **Lek B** | | | | |
| Mężczyzn | 100 | 20 | 20 % | Skuteczność leku B jest *mniejsza* niż leku A. |
| Kobiet | 50 | 35 | 70 % | Skuteczność leku B jest *mniejsza* niż leku A. |
| Ogółem | 150 | 55 | 36,7 % | Skuteczność leku B jest *większa* niż leku A. |

A zatem lek A jest lepszy i dla kobiet i dla mężczyzn, ale gorszy „w ogóle”! Paradoks polega na tym, że procentów nie można dodawać bezkarnie.

6. Tylko 0,01 procenta marynarzy umiera na morzu na zawał serca, a mieszkańcy miast aż 5 procent. Czy to znaczy, że wstąpienie do marynarki powoduje zmniejszenie ryzyka zawału? Oczywiście, że nie, w każdym razie nie aż 500-krotnie. Po prostu wśród marynarzy przeważają jednak ludzie zdrowi!

7. Pewien kraj skutecznie walczył z inflacją. W pierwszym kwartale ceny wzrosły o 25 %, w drugim o 10 % , w trzecim o 4 % , w czwartym o 2 %. Jaki był średni wzrost cen? Narzucająca się odpowiedź $\frac{28+10+4+2}{4}=11$ procent jest błędna. Jeżeli bowiem coś kosztowało na początku roku złotówkę, to pod koniec pierwszego kwartału 1 zł 28 gr, pod koniec drugiego $1{,}28\cdot 1{,}10$ zł, pod koniec trzeciego $1{,}28\cdot 1{,}10\cdot 1{,}04$ zł a pod koniec czwartego kwartału $1{,}28\cdot 1{,}10\cdot 1{,}04\cdot 1{,}02$ zł, czyli po zaokrągleniu do pełnych groszy 1 zł 49 gr. Natomiast średni wzrost cen o 11 procent kwartalnie powoduje, że ceny „grudniowe” wynoszą $1{,}11^4 = 1{,}52$ cen „styczniowych”.
8. Czy można obniżyć cenę o ponad 100 % ? W 2002 roku na ulicach Warszawy można było znaleźć olbrzymie tablice (we współczesnej „polszczyźnie” billboardy) z tekstem „Obniżka cen na mieszkanie o ponad 100 procent”. Zaśmiewaliśmy się z tego... do chwili, gdy ktoś uważnie przeczytał, o co chodzi. Oferta banku była następująca: jeśli złożysz u nas pieniądze, to oprócz odsetek możesz wygrać za darmo mieszkanie. A więc rzeczywiście była to obniżka ceny mieszkania o ponad sto procent.

## Zadania na procenty z egzaminów wstępnych na rozmaite uczelnie w kraju w ciągu ostatnich kilku lat. **Zamieszczone tu zadania to dość reprezentatywna próbka.**

1. Jeden promil jednego miliona to a) tysiąc, b) 10 tysięcy, c) 100 tysięcy, d) 100.
2. Aby wykonać parę butów, potrzeba 500 $cm^2$ skóry. Gdy rozmiar butów powiększymy o 20 % , to potrzeba będzie
   a) 1000 $cm^2$ skóry. b) 720 $cm^2$ skóry. c) 600 $cm^2$ skóry. d) 750 $cm^2$ skóry.
3. Aby wykonać piłkę, potrzeba 1 $m^2$ skóry. Jeśli chcielibyśmy, aby piłka miała promień o 10 % większy, musimy zużyć
   a) 1,01 $m^2$ skóry. b) 1,10 $m^2$ skóry. c) 1,21 $m^2$ skóry. d) $\sqrt{1{,}10}$ $m^2$ skóry.
4. Liczba dodatnia $a$ jest większa od liczby $b$ o 20 % . Wobec tego liczba $b$ jest mniejsza od liczby $a$ o
   a) 20 %. b) 32,3 %. c) $16\frac{2}{3}$ %. d) 25 %.

5. Śrubokręt młotek kosztują tyle samo. Jeśli śrubokręt podrożeje o 5 % a młotek o 3 %, to za zestaw 3 śrubokrętów i 3 młotków trzeba będzie zapłacić
   a) o 4 % więcej. b) o 8 % więcej. c) o 24 % więcej.
6. Jeśli 0,2 % liczby $x$ wynosi 0,03, to liczba $x$ jest równa a) $66\frac{2}{3}$. b) 15. c) $6\frac{2}{3}$ %.
7. Dwie kolejne obniżki ceny pewnego towaru o 20 % i o 15 % są równoważne jednorazowej obniżce o a) 32 %. b) 32,5 %. c) 35 %.
8. Jeśli towar staniał pięciokrotnie o 20 %, to teraz
   a) rozdawany jest za darmo. b) kosztuje mniej niż $\frac{1}{3}$ początkowej ceny. c) kosztuje więcej niż $\frac{1}{4}$ początkowej ceny.
9. W pewnej kawiarni ceny poranne są o 10 % mniejsze niż popołudniowe. Ceny wieczorne są o 10 % większe niż popołudniowe. Ile kosztuje wieczorem kawa, która rano kosztuje 4 zł 32 grosze?
   a) 4 zł 80 gr, b) 4 zł 96 gr, c) 5 zł 16 gr, d) 5 zł 28 gr, e) 5 zł 44 gr.

## Propozycje trudniejszych zadań na procenty.

Zadanie 1. Trasa z miasta $A$ do $B$ ma $2\,d$ kilometrów. Autobus jedzie zwykle z jednostajną prędkością $v$. Pewnego dnia przez $d$ kilometrów jechał o $p$ procent wolniej. O ile procent szybciej niż zwykła prędkość musi jechać na drugim odcinku trasy, by przyjechać o wyznaczonej porze?

Rozwiązanie. Pierwsze $d$ kilometrów jechał z prędkością $(1-p/100)v$. Czas zużyty na pokonanie tej drogi był zatem równy $t_1 = \frac{d}{v(1-p/100)}$. Załóżmy, że drugą cześć trasy autobus jedzie o $q$ procent szybciej, to znaczy z prędkością $(1+q/100)v$. Wtedy przebywa drogę $d$ w czasie $t_2 = \frac{d}{v(1+q/100)}$. Ale $t_1 + t_2$ ma być równe $\frac{2d}{v}$. Otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{v(1-p/100)} + \frac{d}{v(1+q/100)} = \frac{2d}{v}$$

skąd

$$\frac{1}{1-p/100} + \frac{1}{1+q/100} = 2$$

Widzimy, że odpowiedź nie zależy od odległości $d$ ani od prędkości $v$. Po rozwiązaniu równania mamy:

$$q = \frac{50p}{50-p}.$$

A zatem na przykład zmniejszenie prędkości o 10 procent na pierwszym odcinku powoduje konieczność jazdy szybszej o 12,5 procent na drugim. Warto to przedstawić tabelką:

| Zmniejszenie prędkości na pierwszym odcinku, w procentach | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Konieczność zwiększenia prędkości na drugim odcinku, w procentach | 5,555... | 12,5 | 21,4 | 33,3 | 50 | 75 | 117 | 200 | 450 | 2450 |

Oczywiście dane z końca tabelki nie mają praktycznego znaczenia: nie da się zwiększyć prędkości autobusu o 200 procent (znaczyłoby to, że zamiast 80 km/h jedzie 240 km/h). Warto naszkicować wykres tej zależności.

Zadanie 2. Pozornie to samo, ale tylko pozornie. Autobus jedzie z miasta $A$ do miasta $B$ $2h$ godzin z prędkością $v$ *km/h*. Przez połowę czasu podróży, a więc przez pierwsze $h$ godzin jechał z prędkością o $p$ procent mniejszą niż średnia $v$. O ile procent więcej niż średnia musi jechać na drugim odcinku, by przyjechać w oznaczonym czasie?

Rozwiążmy. Odległość między miastami równa jest $\frac{v}{2h}$ kilometrów. Przez pierwsze $h$ godzin autobus przejechał $v(1-p/100)/h$ kilometrów, zostało zatem $\frac{v}{h}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1-p/100}\right)$ kilometrów, które ma przejechać w $h$ godzin. Jego prędkością musi być zatem $v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1-p/100}\right)$. Musimy wyznaczyć, o ile procent ta wielkość jest większa od $v$.

Zadanie 3. Cena drobnego ogłoszenia w gazecie jest równa 3 złote za linijkę w zwykłe dni, a 5 złotych w wydaniu sobotnio-niedzielnym. Jeżeli zamieszczamy ogłoszenie przez cały tydzień, to cena w następnym tygodniu jest mniejsza o 20 procent, a w trzecim tygodniu o kolejne 20 procent. Potem cena już nie spada. Przez ile kolejnych dni możemy zamieszczać trzywierszowe ogłoszenie, jeżeli nie chcemy wydać więcej niż 160 złotych?

Rozwiązanie. Przez pierwszy tydzień płacimy $3\cdot(5\cdot3+5)=60$ złotych, w drugim tygodniu 48 zł, w trzecim 38,4, czyli razem przez pierwsze trzy tygodnie 146 zł 40 gr. Zostaje do wydania 13 zł 60 groszy. Koszt dzienny ogłoszenia w zwykły dzień wynosi dla nas teraz $3\cdot3\cdot0{,}8^2$ = 5 zł 76 gr. Możemy więc zamieścić ogłoszenie jeszcze w poniedziałek i wtorek. Łącznie daje to 23 dni.

**Propozycja lekcji: podatki**.

Warto poświęcić trochę czasu na omówienie systemu podatkowego w Polsce i modelowe obliczenia podatków. Poniżej podaję przykład scenariuszy lekcji. Można te lekcje przeprowadzić w dowolnym momencie, ale największą korzyść odniosą uczniowie, jeżeli zrobimy to wczesną wiosną, gdy uczniowie znają już nierówności i wykresy funkcji. Najpierw pracujemy z danymi zbliżonymi do rzeczywistych, ale bardzo uproszczonymi, po to, żeby obliczenia były łatwe. Przedstawiony materiał jest jednak za obszerny i należy dokonać wyboru.

Uczniowie powinni zrozumieć, że wykres funkcji opisującej wysokość podatku w zależności od dochodu jest funkcją „kawałkami liniową” i wypukłą. Oczywiście nie wprowadzamy definicji funkcji wypukłej, tylko tłumaczymy opisowo. Wyjaśniamy tylko, jakie jest znaczenie takiego kształtu wykresu. Drugą sprawą, którą warto dokładnie wyjaśnić, jest korzyść ze wspólnego rozliczania się małżonków. Można też wyjaśnić różnicę między odpisem od dochodu a odpisem od podatku, ale może na to nie starczyć czasu. Dodatkową korzyścią lekcji o podatkach jest powtórzenie wiadomości o procentach i nauka posługiwania się kalkulatorem.

**1. Wstęp**. Co to jest podatek dochodowy (proponowane streszczenie dla uczniów). Każdy zarabiający obywatel państwa jest zobowiązany oddawać część zarobionych pieniędzy do wspólnej kasy całego państwa. Z tych pieniędzy finansowane są wspólne wydatki, a więc wydatki na wojsko, policję, ochronę granic, funkcjonowanie urzędów państwowych, powszechną opiekę zdrowotną, na realizację wielu praw obywateli (np. prawo do nauki), na pomoc socjalną i tak dalej. We wszystkich krajach ludzie lepiej zarabiający płacą większe podatki, najubożsi nie płacą nic.

**2. Przychód i dochód**. Gdy dostajemy zarobione pieniądze, jest to nasz przychód. Najczęściej jednak, żeby zarobić te pieniądze, musieliśmy ponieść pewne koszty. Prawie każdy dojeżdża do pracy, płacąc za bilet tramwajowy, autobusowy, czy kolejowy. Wiele osób musi się dokształcać, aby lepiej pracować, np. nauczyciele. Artysta musi kupować materiały, autor książki kupuje materiały piśmienne, itd. To wszystko są koszty uzyskania przychodu. Dochodem nazywamy różnicę między przychodem a kosztami. To są efektywnie zarobione przez nas pieniądze, które możemy przeznaczyć na jedzenie, rozrywki i na co tylko chcemy. To od dochodu, a nie od przychodu płacimy podatki.

**3. Progi podatkowe**. Większość państw świata przyjęła rozwiązanie, że im więcej zarabiamy, tym więcej procent dochodu musimy przeznaczyć na podatki. Granice, od których zmienia się wzór na obliczanie podatku w zależności od dochodu, nazywamy progami podatkowymi. Progi te i wszystkie zasady płacenia podatków uchwala każdego roku parlament. W Polsce w 2001 roku obowiązywały następujące zasady:

- ✓ dochód roczny do 2596 zł był wolny od podatku,
- ✓ dla dochodu od 2596 zł do 37024 zł podatek wynosił 19 % minus kwota 493 zł 32 gr,
- ✓ dla dochodu od 37024 zł do 74048 zł podatek wynosił 6541 zł plus 30% nadwyżki ponad 37024 zł,
- ✓ dla dochodu ponad 74048 złotych podatek wynosił 17648 zł 44 gr plus 40% nadwyżki ponad 74048 złotych.

**4. Nasze zadanie**. **Podatki w Rurytanii.** Dla ułatwienia obliczeń przyjmijmy następujące dane (możemy podać te dane jako podatki w nieistniejącym państwie, np. Rurytanii, a walutę nazwać np. rurą, możemy pracować i w złotówkach; inna wersja nazwy kraju: Majlandia, waluta 1 maj). Struktura danych oparta jest na podatkach w Polsce, lecz progi podatkowe są dobrane, tak by większość obliczeń można było wykonać i bez kalkulatora.

| | **Dochód roczny** | **Podatek** |
|---|---|---|
| 1 | Mniej niż 5 tysięcy | Nie płacimy |
| 2 | Od 5 tysięcy do 30 tysięcy | Płacimy 20% różnicy między dochodem a kwotą 5 tysięcy |
| 3 | Od 30 tysięcy do 60 tysięcy | Płacimy 5 tysięcy plus 30% różnicy między dochodem a kwotą 30 tysięcy |
| 4 | Powyżej 60 tysięcy | Płacimy 14 tysięcy plus 40% różnicy między dochodem a kwotą 60 tysięcy |

Ćwiczenie 1. Oblicz podatek należny w Rurytanii od dochodu 30 tysięcy.

Odpowiedź: 30 tysięcy to akurat próg podatkowy. Możemy obliczyć podatek według zasady nr 2 (20 % różnicy między dochodem a kwotą 5 tysięcy) albo według zasady nr 3 (5 tysięcy plus 30% różnicy między dochodem a kwotą 30 tysięcy . Przekonaj się, że obydwa sposoby dają ten sam wynik.

Ćwiczenie 2. Oblicz podatek należny od dochodu 60 tysięcy. Przekonaj się, że wzory nr 3 i nr 4 dają ten sam wynik.

Ćwiczenie 3. Wypełnij tabelkę. Dochód i podatek wyrażone są w tysiącach.

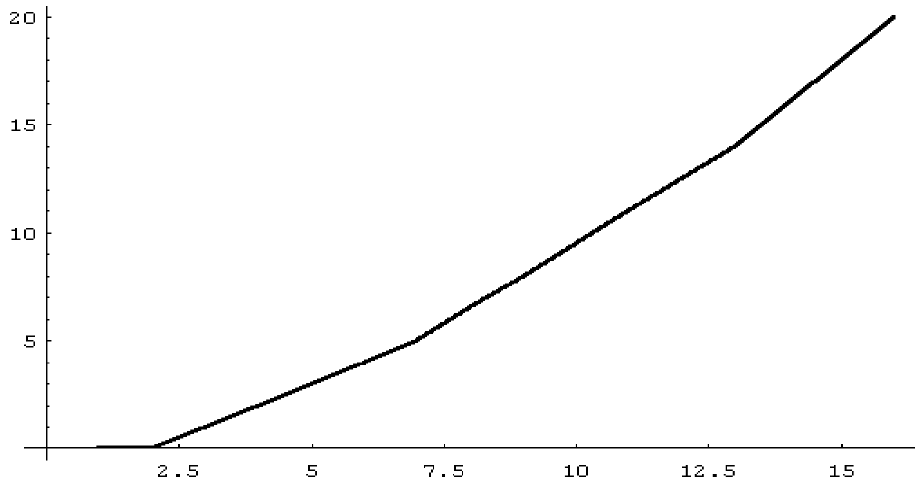
| Dochód | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Podatek | | | | | | | | | | | | | | | |

Odp.

| Dochód | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Podatek | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6,5 | 8 | 9,5 | 11 | 12,5 | 14 | 16 | 18 | 19,5 |

Ćwiczenie 4. Narysuj wykres funkcji obrazującej wielkość podatku w zależności od dochodu. Obierz skale na osiach, tak by wykres był czytelny.

Odp.




Ćwiczenie 5. Oblicz podatki od dochodów:
a) 6523 b) 13500 c) 27980 d) 25430 e) 33056 f) 55324 g) 100000.

Ćwiczenie 6. Pan Kowalski zapłacił 3200 podatku. Ile wyniósł jego dochód?

Rozwiązanie ćwiczenia 6. Z tabelki w zadaniu widzimy, że dochód pana Kowalskiego wyniósł więcej niż 20 tysięcy, ale mniej niż 25 tysięcy. Zatem podatek obliczany był według wzoru nr 2 (20% różnicy między dochodem a kwotą 5 tysięcy). Oznaczmy dochód pana Kowalskiego przez $x$. Mamy zatem równanie

$$3200 = (x - 5000) \cdot 0{,}2$$

Wyznaczamy stąd $x = 21000$. Roczny dochód pana Kowalskiego był równy 21 tysięcy.

Możemy to zadanie rozwiązać nie układając równania. 20 procent to jedna piąta. Zatem 5 razy podatek pana Kowalskiego to 5000 więcej niż jego dochód. Stąd wynika, że dochód jest równy 21000.

Ćwiczenie 7. Pani Wiśniewska zapłaciła 6666 podatku. Ile wyniósł jej dochód?

Rozwiązanie. Z tabelki w zadaniu widzimy, że dochód pani Wiśniewskiej wyniósł ponad 30 tysięcy, ale mniej niż 60. Zatem podatek obliczany był według wzoru nr 3 (5 tysięcy plus 30% różnicy między dochodem a kwotą 30 tysięcy). Oznaczmy dochód pani Wiśniewskiej przez $x$. Mamy zatem równanie

$$6666 = 5000 + (x - 30000) \cdot 0{,}3$$

Wyznaczamy stąd $x = \frac{6666}{0{,}3} - \frac{5000}{0{,}3} + 30000 \approx 35553{,}33$.

Roczny dochód pani Wiśniewskiej był równy 35533,33.
I to zadanie możemy rozwiązać nie układając równania. Jest to jednak bardziej skomplikowane niż w danych z ćwiczenia 6.

Ćwiczenie 8. Pan Jankowski zapłacił 15324 podatku. Ile wyniósł jego dochód?

Rozwiązanie ćwiczenia 8. Z tabelki w zadaniu widzimy, że dochód pana Jankowskiego wyniósł ponad 60 tysięcy. Zatem podatek obliczany był według wzoru nr 4 (14 tysięcy plus 40% różnicy między dochodem a kwotą 60 tysięcy). Oznaczmy dochód pana Jankowskiego przez $x$. Mamy zatem równanie

$$15324 = 14000 + (x - 60000) \cdot 0,4$$

Wyznaczamy stąd $x = \dfrac{1324}{0,4} + 60000 = 3310 + 60000 = 63310$.

Roczny dochód pana Jankowskiego był równy 63310.

Ćwiczenie 9. Napisz wzór na obliczenie podatku od dochodu $x$.

Odpowiedź: W tysiącach:

$$\text{Podatek }(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \le 5 \\ 0,2 \cdot (x-5) & \text{gdy } 5 < x \le 30 \\ 5+0,3 \cdot (x-30) & \text{gdy } 30 < x \le 60 \\ 14+0,4 \cdot (x-60) & \text{gdy } x > 60 \end{cases}$$

**Wspólne rozliczanie się małżonków**. Ponieważ mąż i żona prowadzą na ogół wspólne gospodarstwo domowe i nie dzielą pieniędzy na „moje" i „twoje", więc logiczne jest, że mogą się rozliczać wspólnie. Zasady wspólnego rozliczania się małżonków są tak dobrane, że przy wspólnym rozliczaniu się nigdy nie tracimy, a prawie zawsze zyskujemy. Zasady te są następujące:

> Oblicza się średnią arytmetyczną dochodów małżonków. Traktuje się to jak zarobki jednej osoby i oblicza podatek według normalnych zasad. Obliczony podatek mnoży się przez dwa.

Ćwiczenie 10. Obliczyć podatek, jaki zapłacą małżonkowie, gdy jedno z nich miało dochód $a$ = 24 tysiące, a drugie $b$ = 34 tysięcy. Czy wspólne opodatkowanie się jest korzystne dla małżonków?

Według wzoru z ćwiczenia 9 i algorytmu podanego wyżej obliczamy. Średnia arytmetyczna dochodów małżonków to $c = \dfrac{a+b}{2} = 29$ tysięcy. Od tej kwoty płacimy podatek równy (w tysiącach) $0,2 \cdot (29 - 5) = 4,8$. Należny podatek jest równy 9,6 tysiąca. Gdyby mąż i żona płacili oddzielnie, to ich łączny podatek byłby równy

$$0,2 \cdot (24 - 5) + 5 + 0,3 \cdot (34 - 30) = 0,2 \cdot 19 + 5 + 0,3 \cdot 4 = 10.$$

a więc więcej niż przy łącznym opodatkowaniu się.

Ćwiczenie 11. Wyprowadzić wzór ilustrujący korzyść ze wspólnego opodatkowania się małżonków, gdy zarobki jednego z nich są równe $a$, drugiego $b$ i $5 < a < 30$, $30 < b < 60$, przy czym suma $a + b$ jest większa od 60.

Mamy $5 < \frac{a+b}{2} < 30$, zatem od średniej arytmetycznej zarobków męża i żony należny podatek jest równy $0{,}2 \cdot \left(\frac{a+b}{2} - 5\right)$. Zgodnie z regułą, małżeństwo płaci dwukrotność tej kwoty, czyli $0{,}2 \cdot (a+b) - 2$. Gdyby rozliczali się oddzielnie, to podatek mniej zarabiającej osoby byłby równy $0{,}2 \cdot (a - 5) = 0{,}2 \cdot a - 1$, a osoby więcej zarabiającej $5 + 0{,}3 \cdot (b - 30) = 0{,}3 \cdot b - 4$. Łącznie zapłaciliby

$$0{,}2 \cdot a - 1 \ + \ 0{,}3 \cdot b - 4 \ = \ 0{,}2 \cdot a + 0{,}3 \cdot b - 5.$$

Różnica między kwotą podatku „wspólnego” a „oddzielnego” jest zatem równa $0{,}2 \cdot (a+b) - 2 - 0{,}2 \cdot a - 0{,}3 \cdot b + 5 = 3 - 0{,}1 \cdot b$. Ponieważ $b > 30$, więc różnica ta jest zawsze dodatnia. Znaczy to, że lepiej rozliczać się wspólnie.

Ćwiczenie 12. Wyprowadzić wzory ilustrujące korzyść ze wspólnego rozliczania się małżonków, gdy oboje zarabiają między 5 a 30.

Oznaczmy jak poprzednio dochody małżonków przez $a$ i $b$. Przy oddzielnym rozliczaniu się jedno zapłaci $0{,}2 \cdot (a-5)$, zaś drugie $0{,}2 \cdot (b-5)$. Suma tych dwóch wielkości równa jest $0{,}2 \cdot (a+b) - 2$, dokładnie tyle samo, ile wyniósłby podatek płacony oddzielnie, równy $2 \cdot 0{,}2 \cdot \left(\frac{a+b}{2} - 5\right)$.

Ćwiczenie 13. Wyprowadzić wzory ilustrujące korzyść ze wspólnego rozliczania się małżonków, gdy oboje zarabiają między 30 a 60.

Oznaczmy jak poprzednio dochody małżonków przez $a$ i $b$. Przy oddzielnym rozliczaniu się jedno zapłaci $5 + 0{,}3 \cdot (a-30)$, zaś drugie $5 + 0{,}3 \cdot (b-30)$, czyli łącznie $0{,}3 \cdot (a + b) - 8$. Przy wspólnym zapłaciliby dwukrotność liczby

$$5 + 0{,}3 \cdot \left(\frac{a+b}{2} - 30\right)$$

czyli $0{,}3 \cdot (a + b) - 8$, dokładnie tyle samo.
A więc gdy wpadają w ten sam próg, to wszystko jedno.

Po przerobieniu powyższych ćwiczeń uczniowie nie będą mieli kłopotów z obliczeniami na prawdziwych danych. Niezbędny będzie tylko kalkulator.

## Podatki w Polsce

Ćwiczenie 14. Uwzględniając realne dane dotyczące podatków za 2001 rok, a więc:

- ✓ dochód roczny do 2596 zł jest wolny od podatku
- ✓ dla dochodu od 2596 zł do 37024 zł podatek wynosi 19 % minus kwota 493 zł 32 gr,
- ✓ dla dochodu od 37024 zł do 74048 zł podatek wynosi 6541 zł plus 30% nadwyżki ponad 37024 zł,
- ✓ dla dochodu ponad 74048 złotych podatek wynosi 17648 zł 44 gr plus 40% nadwyżki ponad 74048 złotych.

oblicz, ile podatku ma zapłacić

a) pan Jankowski, którego roczny dochód był równy 3000 zł,
b) pani Kowalska, której roczny dochód był równy 44034 zł 77 gr,
c) pan Wiśniewski, którego dochód był równy 79928 zł,
d) pani Kwiecińska, której dochód był równy 104048 zł,

Podatek zaokrąglamy do pełnych dziesiątek groszy

Odpowiedzi: a) 76 zł 70 gr, b) 8641 zł , c) 20000 zł , d) 29648 zł 40 gr.

Ćwiczenie 15. Uwzględniając realne dane dotyczące podatków za 2001 rok oblicz, jaki podatek zapłacili państwo Kowalscy, jeżeli pan Kowalski miał dochód 40228 zł, pani Kowalska 30228 zł i rozliczali się wspólnie. Oblicz, o ile więcej zapłaciliby, gdyby rozliczali się oddzielnie.

Rozwiązanie. Średnia arytmetyczna dochodów małżonków to 35228 zł. Od tej kwoty należny podatek to $35228 \cdot 0{,}19 - 493{,}32 = 6200$ zł. Łączny podatek małżonków to dwa razy tyle, czyli 12400 zł. Gdyby rozliczali się oddzielnie, to podatek męża wyniósłby

$$(40228 - 37024) \cdot 0{,}3 + 6541 = 7502{,}20$$

a podatek żony

$$30228 \cdot 0{,}19 + 493{,}32 = 6236{,}60$$

zatem łącznie musieliby zapłacić 7502 zł 20 gr plus 6236 zł 60 gr, czyli 13738 zł 80 gr, a więc o 1338 zł 40 gr więcej.

Ćwiczenie. 16. Zilustrować graficznie korzyść ze wspólnego rozliczania się małżonków.

Ćwiczenie 17. Żona pana Wiśniewskiego nie pracuje zawodowo. Pan Wiśniewski prowadzi firmę i zarabia bardzo dobrze: 100000 zł rocznie. W 2001 roku rozliczali się razem. Ile podatku zapłacili? Ile zapłaciliby, gdyby rozliczali się oddzielnie?

Rozwiązanie. Średni dochód państwa Wiśniewskich wyniósł 50000 złotych. Należny podatek od sumy 50000 złotych to $(50000 - 37024) \cdot 0{,}3 + 6541 = 10433$ zł 80 gr. Łączny podatek małżonków jest zatem równy $2 \cdot 10433$ zł 80 gr , czyli 20867 zł 60 gr. Pani Wiśniewska sama nie musi składać zeznania podatkowego, gdyż nie zarabia. Podatek, który zapłaciłby pan Wiśniewski obliczany jest według najwyższej stawki i wynosi 17648 zł 44 gr plus 40% nadwyżki ponad 74048 złotych. Po obliczeniach daje to

$$17648{,}44 + (100000 - 74048) \cdot 0{,}4 = 28029{,}24.$$

Jest to ponad 7 tysięcy więcej niż gdyby podatek płacono razem!

Ćwiczenie 18. Młode małżeństwo, Janek i Teresa zaczęli po studiach pracę od października 2001 roku. Nie zarabiają dużo, dochód Jacka do końca grudnia wyniósł 2500 zł, dochód Teresy 2690 zł. Podatki płaci się jednak w skali rocznej. Czy lepiej im będzie rozliczać się razem, czy oddzielnie?

Rozwiązanie. Dochód Jacka wyniósł poniżej kwoty wolnej od podatku. Przy rozliczaniu się oddzielnym nie zapłaci podatku w ogóle. Podatek Teresy to dziewiętnaście procent 2700, odjąć 493,32 zł. Jest to równe 17 zł 80 groszy, po zaokrągleniu. Przy wspólnym rozliczaniu się średnia arytmetyczna ich dochodów będzie równa 2595 zł , o złotówkę mniej niż granica kwoty wolnej od podatku. Ponieważ dwa razy zero jest równe zero, więc ich łączny podatek też jest równy 0. W każdej sytuacji korzystniej rozliczać się wspólnie, niż indywidualnie. Z przytoczonych przykładów widać też, że likwidacja możliwości wspólnego rozliczania się małżonków przyniosłaby dużo pieniędzy do budżetu. Byłoby to jednak zdecydowanie niesprawiedliwe rozwiązania ze społecznego punktu widzenia.
Inną propozycją lekcji jest obliczanie spłat kredytu.

## Propozycja lekcji. Amortyzacja kredytu metodą stałych rat kapitałowych.

**Cel:** nauczenie najprostszych obliczeń finansowych. Duża zgodność z realnym zastosowaniem matematyki. Zgodność z programem szkolnym: formalnie duża, praktycznie średnia. Polecane użycie kalkulatora.

**Wiadomości dla uczniów**. Kredyt to pożyczka pieniędzy z banku, zwykle na określony cel, np. samochód, mieszkanie, rozkręcenie produkcji. Dzięki kredytowi możemy zrealizować cel, na który nas na razie nie stać. Bank kredytowy to taki, którego głównym celem jest udzielanie kredytów. Gdy gospodarka przeżywa trudności, takie jak w Polsce obecnie, banki chętniej czerpią zyski z udzielania kredytów niż z obracania pieniędzmi klientów. Za możliwość skorzystania z pieniędzy, które bank nam pożycza, musimy oddać nie tylko pieniądze, ale i odsetki. Istnieje wiele metod spłacania kredytu. Najprostszy z nich to metoda stałych rat kapitałowych. Obowiązuje tu zasada:

**Odsetki są obliczane od nie spłaconej jeszcze części kredytu**.

Łatwo ją zrozumieć na przykładzie.

<u>Zadanie 1.</u> Pożyczamy z banku 20000 złotych na 4 lata, do spłaty w ratach rocznych. Oprocentowanie kredytu wynosi 15 %. Spłacamy po 50000 złotych rocznie plus odsetki Tworzymy tabelę:

| Lata | Kwota kredytu na początku okresu | Rata kapitałowa | Odsetki | Kwota płatności | Kwota kredytu na koniec okresu |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20000 | 5000 | 3000 | 8000 | 1500 |
| 2 | 15000 | 5000 | 2250 | 7250 | 1000 |
| 3 | 10000 | 5000 | 1500 | 6500 | 500 |
| 4 | 5000 | 5000 | 750 | 5750 | 0 |
| Razem | | 20000 | 7500 | 27500 | |

Taką tabelę nazywamy *planem amortyzacji kredytu.* Widzimy z niej, ile kiedy będziemy musieli płacić, ile zostaje jeszcze do spłacenia itp.

Wyznaczone dane można ilustrować rozmaitymi wykresami, z których najbardziej interesujący to wykres wielkości spłaty. Widać z niego, że kwota do spłacania maleje, gdyż odsetki obliczane są od coraz mniejszej podstawy.

Zwracamy uwagę na następujące sprawy:

1. Każdego roku spłacamy taką samą część kapitału, ale coraz mniej odsetek, które są obliczane od coraz mniejszej kwoty.
2. Wzięliśmy kredyt 20000 złotych na 15 procent, a do banku musieliśmy oddać 27500 złotych, czyli o $\frac{7500}{20000}=\frac{75}{200}=\frac{37,5}{100}=37,5$ % więcej. To dlatego, że kredyt był na kilka lat.

Im dłuższy okres na jaki bierzemy kredyt, tym mniejsze spłaty roczne, ale większa suma spłat. Wyobraźmy siebie, że ten sam kredyt bierzemy na 8 lat.

Zadanie 2. Uzupełniając tabelę, ułóż schemat amortyzacji takiego kredytu. Posłuż się kalkulatorem. Zauważ, że na początku płacimy więcej odsetek niż spłaty długu.

| Lata | Kwota kredytu na początku okresu | Rata kapitałowa | Odsetki | Kwota płatności | Kwota kredytu na koniec okresu |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20000 | 2500 | 3000 | 5500 | 17500 |
| 2 | 17500 | 2500 | 2625 | 5125 | 15000 |
| 3 | 15000 | 2500 | 2250 | 4750 | |
| 4 | | 2500 | | | |
| 5 | | 2500 | | | |
| 6 | | 2500 | | | |
| 7 | | 2500 | | | |
| 8 | | 2500 | | | |
| Razem | | 20000 | | | |

Zadanie 3. Ułóż plan amortyzacji kredytu 100000 złotych na 17 procent na 30 lat.

Zadanie 4. Wejdź na stronę Internetową jakiegoś banku, dowiedz się w Internecie na jaki procent udzielane są kredyty na budowę domu. Wyobraź sobie, że bierzesz taki kredyt i ułóż plan amortyzacji.
Uwaga. Możesz otrzymać dane inne niż prawdziwe, gdyż najczęściej raty płacimy miesięcznie, a nie rocznie. Dla uproszczenia zakładamy tutaj, że raty są roczne.

## Sentencja, tylko dla dorosłych

- Wiadomo, że pieniądze wynaleźli Fenicjanie.
- *I bardzo dobrze. Tylko dlaczego tak mało?*

# ROZDZIAŁ III

# ZESTAW WZORÓW (PROPOZYCJA)

## WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \langle 0, \infty) \\ -x & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Jeżeli $x \in R$ i $y \in R$, to

$|x| \geq 0$

$|x| = |-x|$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$

$|x - y| \leq |x| + |y|$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Jeżeli $a \geq 0$ to $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Jeżeli $a \geq 0$ to $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a \quad \text{lub} \quad x \leq -a)$

## POTĘGI

Jeżeli $a \neq 0$ i $n \in N$, to $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$

Jeżeli $a \in R \setminus \{0\}$ i $n \in N$ i $n \neq 0$ to $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Jeżeli $a \in \langle 0; \infty)$ i $m \in N$ i $m \neq 0$ i $n \in N$ i $n \geq 2$ to $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Jeżeli $a \in (0; \infty)$ i $m \in N$ i $m \neq 0$ i $n \in N$ i $n \geq 2$ to $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

**Działania na potęgach**

Jeżeli $(m \in R$ i $n \in R$ i $a \in (0; \infty)$ i $b \in (0; \infty))$ lub $(m \in C$ i $n \in C$ i $a \in R$ i $b \in R$ i $a \neq 0$ i $b \neq 0)$ to

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

## WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a$ i $b$ mamy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

## SILNIA

Wzór rekurencyjny

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1) \quad \text{dla} \quad n \in N \text{ i } n \geq 1 \end{cases}$$

Wzór ogólny

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \quad \text{dla} \quad n \in N \text{ i } n \geq 1$$

## SYMBOL NEWTONA

Jeżeli $n \in N$ i $k \in N$ i $k \leq n$ to

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

## ROZWINIĘCIE DWUMIANU NEWTONA

Jeżeli $a \in R$ i $b \in R$ i $n \in N$ i $n \geq 1$ to

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

## KOMBINATORYKA

Liczba $P_n$ wszystkich różnych permutacji zbioru $n$-elementowego dla $n \in N$ i $n > 0$ jest równa

$$P_n = n!.$$

Liczba $C_n^k$ wszystkich różnych $k$-elementowych kombinacji zbioru $n$-elementowego dla $k \leq n$ i $k \in N$ i $n \in N$ i $k > 0$ i $n > 0$ jest równa

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Liczba wszystkich różnych $k$-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru $n$-elementowego dla $k \leq n$ i $k \in N$ i $n \in N$ i $k > 0$ i $n > 0$ jest równa $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Liczba wszystkich różnych $k$-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $n$-elementowego dla $k \in N$ i $n \in N$ i $k > 0$ i $n > 0$ jest równa $n^k$.

## ELEMENTY STATYSTYKI

Średnia arytmetyczna $\overline{a}$ liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa $\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Średnia geometryczna $m_g$ dodatnich liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

Średnia harmoniczna $m_h$ liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

Wariancja $\sigma^2$ z $n$ uporządkowanych danych $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \overline{a}\right)^2$.

Odchylenie standardowe $\sigma$ z $n$ uporządkowanych danych $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

## PRZYBLIŻENIA LICZB

Jeżeli liczba rzeczywista $a_0$ jest przybliżeniem liczby $a$, to:

- $b = a - a_0$ jest błędem przybliżenia,
- $|b| = |a - a_0|$ jest błędem bezwzględnym przybliżenia,
- dla $a \neq 0$ $\frac{|a - a_0|}{a}$ jest błędem względnym przybliżenia.

## RÓWNANIA STOPNIA PIERWSZEGO

Rozwiązaniem równania $ax + b = 0$, gdy $a \neq 0$ jest liczba $x = -\frac{b}{a}$.

## UKŁAD DWÓCH RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad \text{gdzie} \quad a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \quad \text{i} \quad a_2^2 + b_2^2 \neq 0,$$

jest para liczb $x = \frac{W_x}{W}$ i $y = \frac{W_y}{W}$ dla $W \neq 0$, gdzie

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeżeli $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$ to układ równań jest nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeżeli $W = 0$ i $\left(W_x \neq 0 \text{ lub } W_y \neq 0\right)$ to układ równań jest sprzeczny, nie ma rozwiązań.

## FUNKCJA KWADRATOWA

Dane są liczby rzeczywiste $a$, $b$, $c$, gdzie dla $a \neq 0$. Funkcję $f$ określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in R$ nazywamy funkcją kwadratową (lub trójmianem kwadratowym).
Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy liczbę $\Delta$ określoną wzorem $\Delta = b^2 - 4ac$.

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

**Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a \neq 0$ i $x \in R$**

| $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|
| nie ma miejsc zerowych | jedno miejsce zerowe $x_0 = \frac{-b}{2a}$ | dwa różne miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |

**Postać iloczynowa funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a \neq 0$ i $x \in R$**

| $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|
| nie ma postaci iloczynowej | $f(x) = a(x - x_0)^2$ | $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ |

### Wzory Viète'a

Jeżeli $x_1$ i $x_2$ są rozwiązaniami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

## LOGARYTMY

Dla dowolnych $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$ i $b \neq 1$ i $k \in R$ i $x > 0$ i $y > 0$:

$$x = a^c \Leftrightarrow c = \log_a x$$

$$x = a^{\log_a x}$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

## CIĄG ARYTMETYCZNY I GEOMETRYCZNY

| | Ciąg arytmetyczny | Ciąg geometryczny |
|---|---|---|
| Definicja | Ciąg $(a_n)$ dla którego istnieje $r \in R$ takie, że dla każdego $n \in N$ i $n \geq 1$ $$a_{n+1} = a_n + r.$$ Liczbę $r$ nazywamy różnicą ciągu. | Ciąg $(a_n)$ dla którego istnieje $q \in R$ takie, że dla każdego $n \in N$ i $n \geq 1$ $$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$ Liczbę $q$ nazywamy ilorazem ciągu. |
| Wzór ogólny na $n$-ty wyraz ciągu | $a_n = a_1 + (n-1)r$ <br> $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ dla $n \in N$ i $n > 1$ | $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ <br> $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ dla $n \in N$ i $n > 1$ |
| Wzór na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ | $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ | $S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$ |
| | | Jeżeli $\lvert q \rvert < 1$, to $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ |

## PROCENT SKŁADANY

Jeżeli

$K$ – kapitał początkowy,
$p$ – stopa procentowa wyrażona w procentach,
$n$ – liczba lat (okresów),
$K_n$ - kapitał po $n$ latach (okresach),

to

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## POCHODNA FUNKCJI

Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają pochodne w punkcie $x \in R$, to:

$$\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla} \quad c \in R$$

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

$$\left[f(x) - g(x)\right]' = f'(x) - g'(x)$$

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

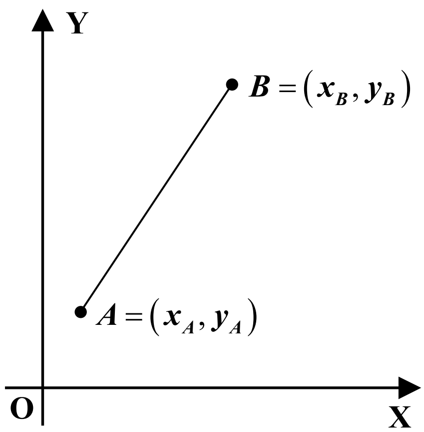
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \quad \text{gdy} \quad g(x) \neq 0.$$

| Wzór funkcji *f* | Pochodna *f'* funkcji *f* | |
|---|---|---|
| $f(x)=c$ | $f'(x)=0$ | $x\in R$ i $c\in R$ |
| $f(x)=ax+b$ | $f'(x)=a$ | $x\in R$ i $a\in R$ i $b\in R$ |
| $f(x)=ax^2+bx+c$ | $f'(x)=2ax+b$ | $x\in R$ i $a\in R$ i $b\in R$ i $c\in R$ |
| $f(x)=x^{\alpha}$ | $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ | $x\in R$ i $\alpha\in N$ i $\alpha>1$<br>lub<br>$x\in R\setminus\{0\}$ i $\alpha\in C$ i $\alpha<0$ |
| $f(x)=\frac{a}{x}$ | $f'(x)=\frac{-a}{x^2}$ | $x\in R$ i $x\neq 0$ i $a\in R$ |

Jeżeli funkcja *f* jest różniczkowalna w punkcie $x_0$, to równanie stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest następujące:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

## GEOMETRIA ANALITYCZNA




Współrzędne wektora

$$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$$

Długość wektora

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Jeżeli $\vec{u}=[u_1,u_2]$, to $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

Środek $M=(x_0,y_0)$ odcinka $AB$

$$x_0=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_0=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Środek ciężkości $S=(x_s,y_s)$ trójkąta o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, $C=(x_C,y_C)$:

$$x_s=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\quad y_s=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

Do pęku prostych przechodzących przez punkt $A=(x_A,y_A)$ należą proste o równaniach:

$x=x_A$ oraz proste o równaniach $y=m(x-x_A)+y_A$, gdzie $m\in R$.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(x_A,y_A)$ i $B=(x_B,y_B)$

- w postaci ogólnej: $(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$,
- w postaci kierunkowej: $y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$ gdy $x_A\neq x_B$.

Równanie ogólne prostej $Ax+By+C=0$, gdzie $A^2+B^2\neq 0$.

Odległość $d$ punktu $M=(x_M, y_M)$ od prostej o równaniu $Ax+By+C=0$ jest wyrażona wzorem

$$d=\frac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Odległość $d$ prostych równoległych $Ax+By+C_1=0$ i $Ax+By+C_2=0$ jest wyrażona wzorem

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Dla pary prostych o równaniach $l_1: y=a_1x+b_1$ i $l_2: y=a_2x+b_2$:

- jeżeli $a_1 \neq a_2$, to proste $l_1$ i $l_2$ przecinają się w punkcie $P=(x, y)$, gdzie
$$x=\frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}, \quad y=\frac{b_1a_2-b_2a_1}{a_2-a_1}$$
- proste $l_1$ i $l_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2$
- proste $l_1$ i $l_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2=-1$.
- tangens kąta $\varphi$ między prostymi $l_1$ i $l_2$ jest równy:
  - jeżeli $1+a_1a_2 \neq 0$, to $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}\right|$
  - jeżeli $1+a_1a_2=0$, to $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Dla pary prostych o równaniach $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ i $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$:

- jeżeli $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$ to proste $l_1$ i $l_2$ przecinają się w punkcie $P=(x, y)$, gdzie
$$x=-\frac{C_1B_2-C_2B_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y=-\frac{A_1C_2-A_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}$$
- proste $l_1$ i $l_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2-A_2B_1=0$
- proste $l_1$ i $l_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2+B_1B_2=0$
- tangens kąta $\varphi$ między prostymi $l_1$ i $l_2$ jest równy:
  - jeżeli $A_1A_2+B_1B_2 \neq 0$, to $\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.
  - jeżeli $A_1A_2+B_1B_2=0$, to $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Jeżeli $\vec{u}=[u_1,u_2]$ i $\vec{v}=[v_1,v_2]$ i $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \neq 0$, to $\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Punkt $A'=(x', y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych, gdy $x'=-x, \quad y'=-y$.

Punkt $A'=(x', y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii względem osi $OX$, gdy

$$x'=x, \quad y'=-y$$

Punkt $A'=(x', y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii względem osi $OY$, gdy

$$x'=-x, \quad y'=y$$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$:

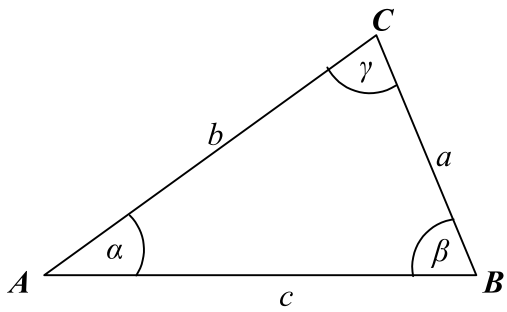
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

lub $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, gdzie $r^2=a^2+b^2-c$ i $a^2+b^2-c>0$.

Pole trójkąta *ABC*, gdzie $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, $C=(x_C,y_C)$ jest równe

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}\right|.$$

## PLANIMETRIA




$\alpha,\ \beta,\gamma$ – miary kątów trójkąta
$a, b, c$ – długości boków trójkąta
$p$ – połowa długości obwodu trójkąta
$S$ – pole trójkąta
$R$ – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie
$r$ – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt
$h_a$ – długość wysokości trójkąta opuszczona z wierzchołka *A* na bok *a*

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

Twierdzenie sinusów: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$.

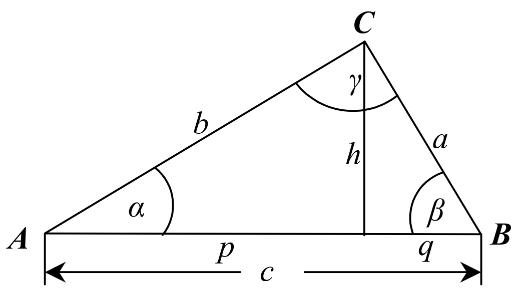
Twierdzenie cosinusów: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$S=\frac{abc}{4R}=r\cdot p$$

Wzór Herona:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$




Jeżeli miara kąta $\gamma=90^\circ$, to:

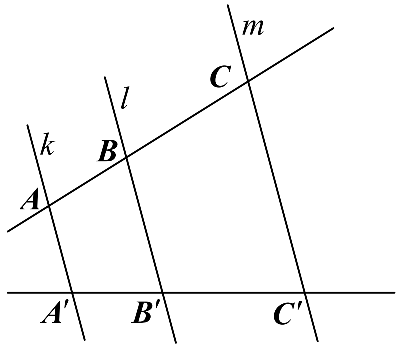
$a^2+b^2=c^2$ – twierdzenie Pitagorasa

$h^2=pq$

$a=c\sin A=c\cos B$

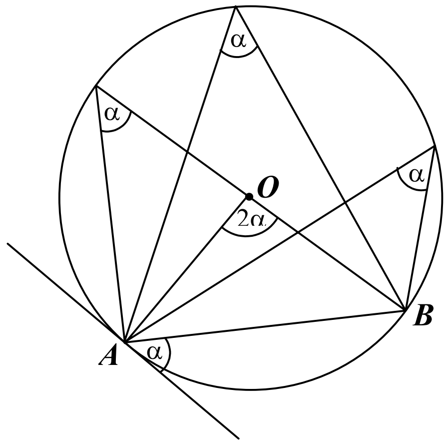
$a=b\cdot\mathrm{tg}A=b\cdot\mathrm{ctg}B$

$$R=\frac{1}{2}c$$

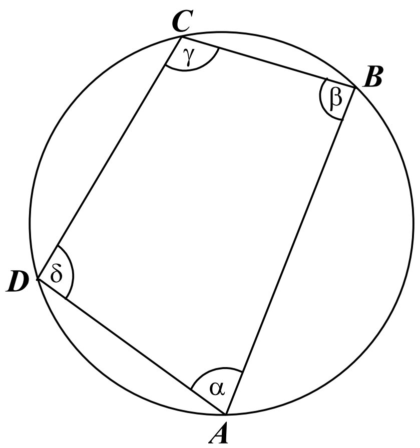



**Twierdzenie Talesa**
Jeżeli $k \parallel l$ i $l \parallel m$, to:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

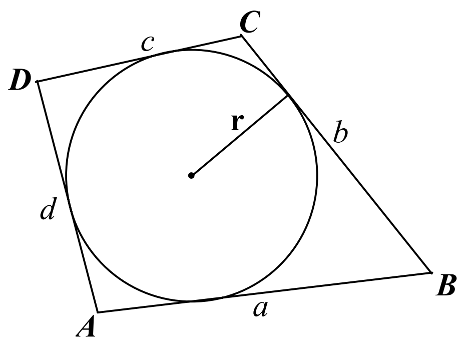



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.



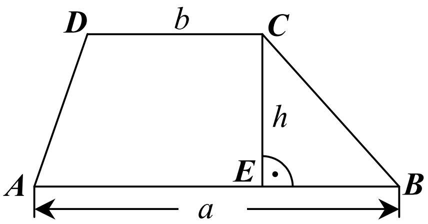

Czworokąt można wpisać w okrąg (na czworokącie opisać okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa $180^\circ$, czyli gdy

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$




Czworokąt wypukły można opisać na okręgu (w czworokąt wpisać okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe, czyli gdy

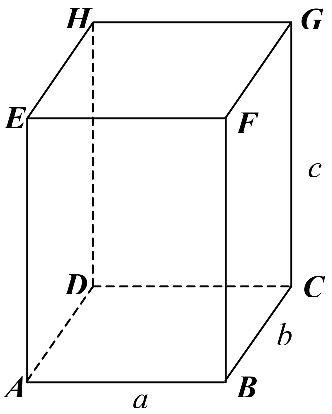
$$a + c = b + d$$




$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

**BRYŁY**

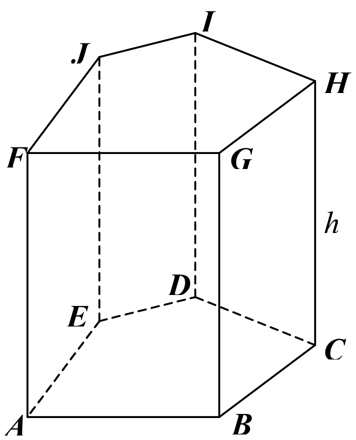
$P$ – pole powierzchni całkowitej, $P_p$ – pole podstawy, $P_b$ – pole powierzchni bocznej, $V$ – objętość bryły.




**Prostopadłościan**

$a, b, c$ – długości krawędzi

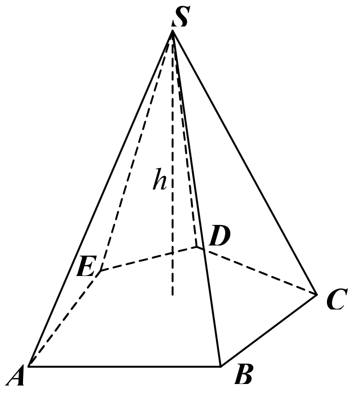
$$P=2\left(ab+bc+ac\right)$$
$$V=abc$$




**Graniastosłup prosty**

$2p$ – długość obwodu podstawy
$h$ – długość wysokości

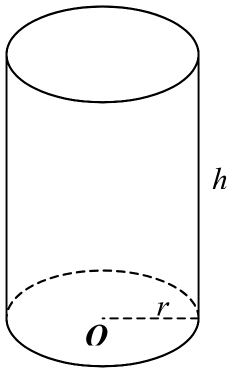
$$P_b=2p\cdot h$$
$$V=P_p\cdot h$$




**Ostrosłup**

$h$ – długość wysokości

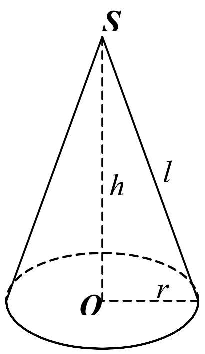
$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$




**Walec**

$r$ – długość promienia podstawy
$h$ – długość wysokości

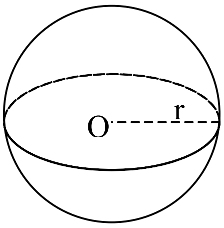
$$P_b = 2\pi rh$$
$$P = 2\pi r(r+h)$$
$$V = \pi r^2 h$$




**Stożek**

$r$ – długość promienia podstawy
$h$ – długość wysokości
$l$ – długość tworzącej

$$P_b = \pi rl$$
$$P = \pi r(r+l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

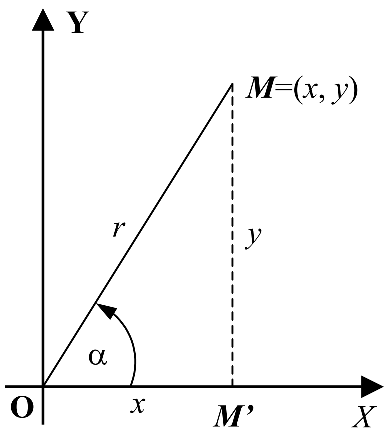



**Kula**

$r$ – długość promienia kuli

$$P = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

## DEFINICJE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH




$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x},\quad x\neq 0,\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y},\quad y\neq 0$$

**Wartości funkcji trygonometrycznych kąta *α*, gdzie $\alpha\in\langle 0,2\pi\rangle$ :**

| $\alpha$ | **0** | $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ | $\pi$ | $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sin**$\alpha$ | 0 | + | 1 | + | 0 | – | –1 | – | 0 |
| **cos**$\alpha$ | 1 | + | 0 | – | –1 | – | 0 | + | 1 |
| **tg**$\alpha$ | 0 | + | nie istnieje | – | 0 | + | nie istnieje | – | 0 |
| **ctg**$\alpha$ | nie istnieje | + | 0 | – | nie istnieje | + | 0 | – | nie istnieje |

+ oznacza, że funkcja przyjmuje wartości dodatnie, – oznacza, że funkcja przyjmuje wartości ujemne.

**Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta:**

- dla dowolnego kąta $\alpha$ : $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
- jeżeli $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in C$ to $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- jeżeli $\alpha\neq k\pi,\quad k\in C$ to $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- jeżeli $\alpha\neq k\pi,\quad k\in C$ to $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

**Wartości funkcji trygonometrycznych:**

| $\alpha$ | $\frac{\pi}{6}\left(30^\circ\right)$ | $\frac{\pi}{4}\left(45^\circ\right)$ | $\frac{\pi}{3}\left(60^\circ\right)$ |
|---|---|---|---|
| **sin**$\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **cos**$\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **tg**$\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| **ctg**$\alpha$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Wzory redukcyjne**

| $\varphi =$ | $-\alpha$ | $\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sin**$\varphi$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ |
| **cos**$\varphi$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| **tg**$\varphi$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ |
| **ctg**$\varphi$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{ctg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ | $\mathrm{tg}\alpha$ | $-\mathrm{tg}\alpha$ |

**Funkcje sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów $\alpha$ i $\beta$:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Jeżeli $1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\neq 0$, to

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Jeżeli $1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\neq 0$, to

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Jeżeli $\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta\neq 0$, to

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$$

Jeżeli $\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha\neq 0$, to

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$$

**Funkcje kąta podwojonego**

Dla dowolnego kąta $\alpha$:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

Jeżeli $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in C$ to

$$\sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in C \quad \text{i} \quad 1 - \text{tg}^2\alpha \neq 0$ to

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in C \quad \text{i} \quad 1 - \text{tg}^2\alpha \neq 0$ to

$$\text{ctg}2\alpha = \frac{\text{ctg}^2\alpha - 1}{2\text{ctg}\alpha}$$

**Funkcje kąta potrojonego**

Dla dowolnego kąta *α*:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \sin\alpha\left(3 - 4\sin^2\alpha\right)$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right) = \cos\alpha\left(4\cos^2\alpha - 3\right)$$

**Sumy funkcji trygonometrycznych**

Dla dowolnych kątów *α* i *β*:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

## RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

**Klasyczna definicja prawdopodobieństwa:**

Jeżeli $\Omega$ jest skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne i $A \subset \Omega$, to liczbę

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych}}$$

nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia *A*, gdzie

$\overline{\overline{A}}$ – liczba elementów zbioru *A*,

$\overline{\overline{\Omega}}$ – liczba elementów zbioru $\Omega$.

Uwaga. Często zamiast $\overline{\overline{A}}$ stosowane jest oznaczenie $|A|$.

**Własności prawdopodobieństwa:**
Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego $\varnothing$ jest równe 0. $\left(P(\varnothing)=0\right)$
Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego $\Omega$ jest równe 1. $\left(P(\Omega)=1\right)$
Jeżeli $A\subset B$, to $P(A)\leq P(B)$.
Dla każdego $A\subset\Omega$ zachodzi nierówność: $0\leq P(A)\leq 1$.
Jeżeli $A\subset\Omega$, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A'$ przeciwnego do zdarzenia $A$:

$$P(A')=1-P(A).$$

Jeżeli $A\subset\Omega$ i $B\subset\Omega$, to prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $A$ i $B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\quad \left(je\dot{z}eli A\cap B=\varnothing, to\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)\right),$$

$$P(A\cup B)\leq P(A)+P(B).$$

**Prawdopodobieństwo warunkowe**

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A\,|\,B)$ zajścia (wystąpienia) zdarzenia $A$ pod warunkiem, że zaszło zdarzenie $B$, nazywamy liczbę

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad \text{gdzie } A\subset\Omega,\ B\subset\Omega \text{ i } P(B)>0.$$

**Zdarzenia niezależne**
Zdarzenia $A\subset\Omega$ i $B\subset\Omega$ nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

**Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym**
Jeżeli zdarzenia $B_1\subset\Omega, B_2\subset\Omega, ..., B_n\subset\Omega$ spełniają warunki:

$1^0)$ $B_i\cap B_j=\varnothing$ dla $i\neq j$ oraz $i,j\in\{1,2,...,n\}$,

$2^0)$ $B_1\cup B_2\cup...\cup B_n=\Omega$,

$3^0)$ $P(B_i)>0$ dla $i\in\{1,2,...,n\}$,

to dla każdego zdarzenia $A\subset\Omega$ zachodzi wzór:

$$P(A)=P(A\,|\,B_1)\cdot P(B_1)+P(A\,|\,B_2)\cdot P(B_2)+...+P(A\,|\,B_n)\cdot P(B_n).$$

**Twierdzenie Bernoulliego**
Prawdopodobieństwo $P_N(k)$ uzyskania dokładnie $k$ sukcesów $(0\leq k\leq N)$ w schemacie $N$ prób Bernoulliego wyraża się wzorem:

$$P_N(k)=\binom{N}{k}\cdot p^k\cdot q^{N-k}$$

gdzie: $p>0,\quad q>0\quad i\quad p+q=1$

$p$ – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie,
$q$ - prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie.

# ROZDZIAŁ IV.

# INFORMACJA O ZMIANACH W INFORMATORZE

W *Informatorze Maturalnym od 2005 roku z matematyki* została zmieniona treść zadania 3. w arkuszu I na poziom podstawowy. Powodem tej zmiany jest błąd jaki wystąpił w kluczu odpowiedzi do rozwiązania zadania 3.c). Proponujemy Szanownym Czytelnikom przeanalizowanie rozwiązania tego zadania i ustalenie rodzaju błędu.
Obecnie zadanie to jest następujące:

**Zadanie 3. (5 pkt)**
Prawdą jest, że: *„Jeżeli w czterocyfrowej liczbie naturalnej suma cyfr tysięcy i dziesiątek jest równa sumie cyfr setek i jedności, to liczba ta jest podzielna przez jedenaście".*
Ponieważ 4+6=8+2, to liczba 4862 jest podzielna przez 11.

a) Wykorzystując podaną cechę podzielności sprawdź, czy liczba 5764 jest podzielna przez 11.
b) Podaj, jaka cyfrą można zastąpić □, aby liczba 95□8 była podzielna przez 11.

Uzasadnij stwierdzenie, że czterocyfrowa liczba, w której cyfry: tysięcy, setek i dziesiątek są jednakowe, a cyfra jedności inna, nie jest podzielna przez 11.

**MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA**

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadania | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 3 | Stwierdzenie, że liczba 5764 jest podzielna przez 11, ponieważ 5+6=7+4 | **1** |
| | Zapisanie warunku 9+□=5+8 i wyznaczenie □=4 | **1** |
| | Zapisanie liczby czterocyfrowej w postaci np. $1000A+100A+10A+X$, gdzie $A\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $X\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ | **1** |
| | Zapisanie powyższej sumy w postaci sumy składników, z których jeden jest liczbą podzielną przez 11, np. $1100A+(10A+X)$ | **1** |
| | Uzasadnienie, że suma pozostałych składników $(10A+X)$ nie jest liczba podzielną przez 11, gdy $A\neq X$ i sformułowanie wniosku. | **1** |

# *Ankieta*

dla nauczycieli matematyki

Czy zdaniem Pani/Pana zaproponowany w biuletynie zestaw wzorów, z których zdający będzie mógł korzystać w czasie egzaminu maturalnego z matematyki **od 2005 roku,** jest:

a) trafny,
b) zbyt obszerny,
c) niewystarczający?

Jeśli zaznaczył(a) Pani/Pan odpowiedź b) lub c) prosimy o przedstawienie swojej propozycji zmian w tym zestawie. Propozycja Pani/Pana pomoże nam ustalić ostateczną wersję zestawu wzorów, który będzie ogłoszony przez Dyrektora CKE jako obowiązujący na egzaminie maturalnym z matematyki **od 2005 roku**.

*Serdecznie dziękujemy za wypełnienie ankiety.*

Nasz adres:

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Wydział Matur
ul. Łucka 11
**00-842 Warszawa**
fax (22) 656-37-27