Zadanie 1.

Węgiel kamienny górnośląski pozostawia 12% popiołu, a węgiel dąbrowiecki - 22%. Oblicz, ile kilogramów popiołu pozostawi 376 kg mieszaniny, w której stosunek węgla dąbrowieckiego do górnośląskiego wynosi 1:3.

Rozwiązanie krok po kroku:

Rozwiązuj! Zrób ile możesz, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 1 - krok 1

Węgiel kamienny górnośląski pozostawia 12% popiołu, a węgiel dąbrowiecki - 22%. Oblicz, ile kilogramów popiołu pozostawi 376 kg mieszaniny, w której stosunek węgla dąbrowieckiego do górnośląskiego wynosi 1:3.

Stosunek 1:3 oznacza, że całość została podzielona na 4 części i jedna z tych części to masa węgla dąbrowieckiego, a trzy z tych części - węgla górnośląskiego.
Stąd wniosek, że węgiel dąbrowiecki stanowi $\frac{1}{4}$ całości mieszaniny, a węgiel górnośląski $\frac{3}{4}$ całości mieszaniny.
Co można obliczyć wiedząc o tym?

Zapisz odpowiedź na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 1 - krok 2

Węgiel kamienny górnośląski pozostawia 12% popiołu, a węgiel dąbrowiecki - 22%. Oblicz, ile kilogramów popiołu pozostawi 376 kg mieszaniny, w której stosunek węgla dąbrowieckiego do górnośląskiego wynosi 1:3.

Można obliczyć masę węgla dąbrowieckiego i górnośląskiego w mieszaninie.

Oblicz je, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 1 - krok 3

Węgiel kamienny górnośląski pozostawia 12% popiołu, a węgiel dąbrowiecki - 22%. Oblicz, ile kilogramów popiołu pozostawi 376 kg mieszaniny, w której stosunek węgla dąbrowieckiego do górnośląskiego wynosi 1:3.

Ilość węgla dąbrowieckiego:

$$\frac{1}{4} \cdot 376 = \frac{376}{4} = 94 \quad [kg]$$

Ilość węgla górnośląskiego:

$$\frac{3}{4} \cdot 376 = \frac{3 \cdot 376}{4} = 3 \cdot 94 = 282 \quad [kg]$$

Co teraz? Zapisz odpowiedź na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 1 - krok 4

Węgiel kamienny górnośląski pozostawia 12% popiołu, a węgiel dąbrowiecki - 22%. Oblicz, ile kilogramów popiołu pozostawi 376 kg mieszaniny, w której stosunek węgla dąbrowieckiego do górnośląskiego wynosi 1:3.

Liczymy teraz ilości popiołu pozostawione przez obydwa składniki mieszaniny:

- węgiel dąbrowiecki pozostawi:

$22\% \cdot 94 = \frac{22}{100} \cdot 94 = \frac{2068}{100} = 20{,}68 \quad [kg]$ popiołu

- węgiel górnośląski pozostawi:

$22\% \cdot 282 = \frac{22}{100} \cdot 282 = \frac{3384}{100} = 33{,}84 \quad [kg]$ popiołu

Jaką odpowiedź teraz piszesz? Odpowiedz na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 1 - krok 5

Węgiel kamienny górnośląski pozostawia 12% popiołu, a węgiel dąbrowiecki - 22%. Oblicz, ile kilogramów popiołu pozostawi 376 kg mieszaniny, w której stosunek węgla dąbrowieckiego do górnośląskiego wynosi 1:3.

Nie piszesz żadnej odpowiedzi, bo jeszcze nie obliczyłeś tego, co miałeś obliczyć. Należy jeszcze obliczyć łączną masę popiołu pozostawioną przez mieszaninę:

$20{,}68 + 33{,}84 = 54{,}52$

Teraz dopiero piszesz odpowiedź: 376 kg mieszaniny pozostawi 54,52 kg popiołu.

Pełne rozwiązanie zadania:

Węgiel dąbrowiecki stanowi $\frac{1}{4}$ całości mieszaniny, a węgiel górnośląski $\frac{3}{4}$ całości mieszaniny.

Ilość węgla dąbrowieckiego w mieszaninie: $\frac{1}{4} \cdot 376 = \frac{376}{4} = 94 \quad [kg]$

Ilość węgla górnośląskiego w mieszaninie: $\frac{3}{4} \cdot 376 = \frac{3 \cdot 376}{4} = 3 \cdot 94 = 282 \quad [kg]$

Liczymy ilości popiołu pozostawione przez obydwa składniki mieszaniny:

- węgiel dąbrowiecki pozostawi: $22\% \cdot 94 = \frac{22}{100} \cdot 94 = \frac{2068}{100} = 20{,}68 \quad [kg]$ popiołu

- węgiel górnośląski pozostawi: $22\% \cdot 282 = \frac{22}{100} \cdot 282 = \frac{3384}{100} = 33{,}84 \quad [kg]$ popiołu

Łączna masa popiołu pozostawionego przez mieszaninę wynosi:

$20{,}68 + 33{,}84 = 54{,}52 \quad kg$

Zadanie 2.

Dane są zbiory:
$A = \{x: |x - 2| < 2, \;\; x \in R\}$
$B = \{x: x^2 - 2x < 0, \;\; x \in R\}$
Wyznacz $A \cap B$

Rozwiązanie krok po kroku:

Co oznacza zapis $A = \{x: |x - 2| < 2, \;\; x \in R\}$?
Spróbuj zapisać go słownie używając przy tym jak najmniej symboli matematycznych, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 2 - krok 1

Dane są zbiory:
$A = \{x: |x-2| < 2, \ \ x \in R\}$
$B = \{x: x^2 - 2x < 0, \ \ x \in R\}$
Wyznacz $A \cap B$

Co oznacza zapis: $A = \{x: |x-2| < 2, \ \ x \in R\}$?

Zapis typu: $\{x: \dots w \dots\}$ oznacza:
"zbiór, którego elementy x spełniają warunek ...w...",
czyli w tym przypadku:
A jest zbiorem takich x, które są liczbami rzeczywistymi i spełniają podaną nierówność
lub krócej
A jest zbiorem liczb rzeczywistych spełniających podaną nierówność
lub jeszcze inaczej
A jest zbiorem rozwiązań podanej nierówności.

Temat zadania mówi: wyznacz $A \cap B$. Co to oznacza?

Zapisz odpowiedź na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 2 - krok 2

Dane są zbiory:
$A = \{x: |x-2| < 2,\ \ x \in R\}$
$B = \{x: x^2 - 2x < 0,\ \ x \in R\}$
Wyznacz $A \cap B$

Zapis $A \cap B$ oznacza iloczyn (inaczej część wspólną) zbiorów A i B. Jeżeli to wiedziałeś, to zdajesz sobie sprawę, że należy najpierw wyznaczyć zbiory A i B.
Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x-2| < 2$.

Rozwiąż tą nierówność, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 2 - krok 3

Dane są zbiory:
$A = \{x: |x-2| < 2,\ \ x \in R\}$
$B = \{x: x^2 - 2x < 0,\ \ x \in R\}$
Wyznacz $A \cap B$

Rozwiązując nierówność $|x-2| < 2$ korzystamy z faktu, że jeżeli wartość bezwzględna z liczby t jest mniejsza od 2: |t|<2, to liczba t musi należeć do przedziału (-2,2).

Stąd mamy:
$|x-2| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 \in (-2, 2)$
Czyli
$x - 2 < 2 \quad i \quad x - 2 > -2$
$x < 4 \quad i \quad x > 0$
$x \in (0, 4)$

Stąd mamy: $A = (0,4)$

Należy teraz wyznaczyć zbiór B, który jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 2x < 0$

Rozwiąż tą nierówność, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 2 - krok 4

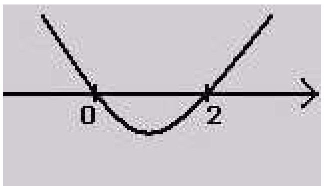
Dane są zbiory:
$A = \{x: |x - 2| < 2,\ \ x \in R\}$
$B = \{x: x^2 - 2x < 0,\ \ x \in R\}$
Wyznacz $A \cap B$

Nierówności kwadratowe najwygodniej jest rozwiązywać w trzech etapach:

1. Wyznaczenie miejsc zerowych trójmianu kwadratowego.
2. Naszkicowanie wykresu trójmianu
3. Odczytanie z wykresu rozwiązania nierówności.

Tak też rozwiązujemy tę nierówność:

$x^2 - 2x < 0$
$x(x - 2) < 0$
$x_1 = 0,\ \ x_2 = 2$



Rozwiązaniem nierówności jest: $x \in (0, 2)$
Dlatego $B = (0,2)$. Wyznacz teraz $A \cap B$, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 2 - krok 5

Dane są zbiory:
$A = \{x: |x-2| < 2, \ \ x \in R\}$
$B = \{x: x^2 - 2x < 0, \ \ x \in R\}$
Wyznacz $A \cap B$

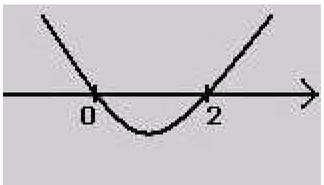
Poprzednio wyznaczyliśmy: $A = (0,4) \ i \ B = (0,2)$.

Część wspólna tych zbiorów: $A \cap B = (0, 2)$.

Pełne rozwiązanie zadania:

$|x-2| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 \in (-2, 2)$
Czyli
$x - 2 < 2 \quad i \quad x - 2 > -2$
$x < 4 \quad i \quad x > 0$
$x \in (0, 4)$
Stąd mamy: $A = (0,4)$

$x^2 - 2x < 0$
$x(x-2) < 0$
$x_1 = 0, \ \ x_2 = 2$



Rozwiązaniem nierówności jest: $x \in (0, 2)$
Dlatego $B = (0,2)$.

Część wspólna tych zbiorów: $A \cap B = (0, 2)$.

Zadanie 3.

Środki trzech okręgów zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta. Boki tego trójkąta mają długości 6cm, 7cm i 9cm. Wyznacz długości promieni tych okręgów.

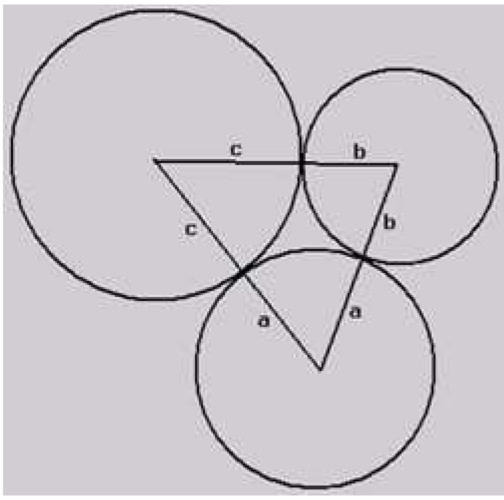
Rozwiązanie krok po kroku:

Wykonaj rysunek ilustrujący sytuację przedstawioną w zadaniu. Zaznacz na rysunku dane. Zapisz, co należy obliczyć. Pomyśl jak to zrobić...

Teraz przejdź do następnej strony.

Zadanie 3 – krok 1

Środki trzech okręgów zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta. Boki tego trójkąta mają długości 6cm, 7cm i 9cm. Wyznacz długości promieni tych okręgów.



Jeżeli wykonałeś/aś poprawny rysunek, to nie powinieneś mieć problemów z napisaniem układu równań:

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ b + c = 7 \\ a + c = 9 \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu jest jednocześnie rozwiązaniem całego zadania.

Rozwiąż go, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 3 – krok 2

Środki trzech okręgów zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta. Boki tego trójkąta mają długości 6cm, 7cm i 9cm. Wyznacz długości promieni tych okręgów.

Zakładamy pesymistycznie, że masz problemy z rozwiązaniem tego układu. Jeżeli tak - podpowiemy:

1. Wyznacz jedną niewiadomą z dowolnego równania (np. a z pierwszego)
2. Wstaw wyznaczoną wartość jednocześnie do pozostałych równań.
3. Pozostałe równania będą miały dwie niewiadome...

Zrób to, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 3 – krok 3

Środki trzech okręgów zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta. Boki tego trójkąta mają długości 6cm, 7cm i 9cm. Wyznacz długości promieni tych okręgów.

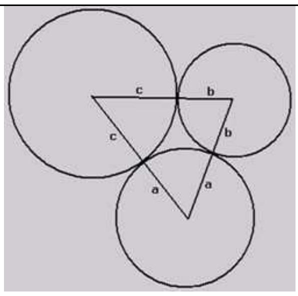
$$\begin{cases} a+b=6 \\ b+c=7 \\ a+c=9 \end{cases}$$

$a=6-b$

$$\begin{cases} b+c=7 \\ 6-b+c=9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b+c=7 \\ -b+c=3 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i otrzymujemy $2c=10$, czyli $c=5$.
Teraz kolejno:
$b+c=7, \quad b+5=7, \quad b=2 \quad \text{oraz} \quad a=6-b, \quad a=6-2, \quad a=4.$
Podajemy odpowiedź: promienie okręgów mają długości $2cm, 4cm\ i\ 5cm$.

Pełne rozwiązanie zadania:



$$\begin{cases} a+b=6 \\ b+c=7 \\ a+c=9 \end{cases}$$

$a=6-b$

$$\begin{cases} b+c=7 \\ 6-b+c=9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b+c=7 \\ -b+c=3 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i otrzymujemy $2c=10$, czyli $c=5$.

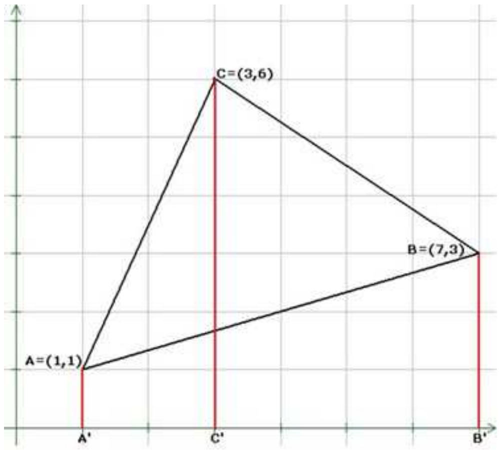
$b+c=7 \quad \Leftrightarrow \quad b+5=7 \quad \Leftrightarrow \quad b=2$

$a=6-b \quad \Leftrightarrow \quad a=6-2 \quad \Leftrightarrow \quad a=4.$

Promienie okręgów mają długości $2cm, 4cm\ i\ 5cm$.

Zadanie 4.

Pole trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C należących do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych można obliczyć wykorzystując wzór na pole trapezu.



$P_{\Delta ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B} = \frac{1+6}{2} \cdot 2 + \frac{6+3}{2} \cdot 4 - \frac{1+3}{2} \cdot 6 =$
$= 7 + 18 - 12 = 13$

Prześledź ten przykład i w analogiczny sposób oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A = (2,5), B = (5,4), C = (6,9)$.

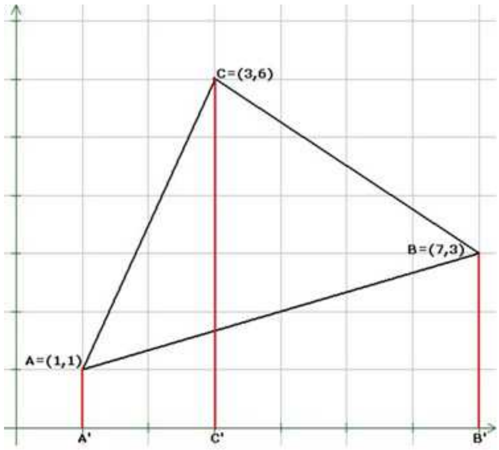
Rozwiązanie krok po kroku:

Prześledziłeś przykład? Jeżeli zrozumiałeś zastosowaną metodę, to oblicz w ten sposób pole podanego trójkąta.
Nawet, gdy Ci się to uda, przejdź następne etapy.

Teraz przejdź do następnej strony.

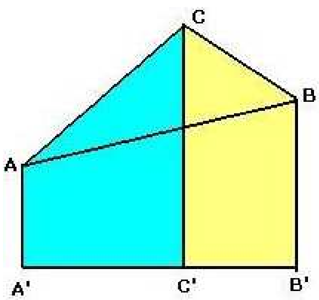
Zadanie 4 – krok 1

Pole trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C należących do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych można obliczyć wykorzystując wzór na pole trapezu.



$$P_{\Delta ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B} = \frac{1+6}{2} \cdot 2 + \frac{6+3}{2} \cdot 4 - \frac{1+3}{2} \cdot 6 =$$
$$= 7 + 18 - 12 = 13$$

Prześledź ten przykład i w analogiczny sposób oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A = (2,5), B = (5,4), C = (6,9)$.



Pole AA'C'C to pole trapezu pomalowanego na niebiesko. Podstawy tego trapezu to odcinki AA' i CC', a wysokość to odcinek A'C'. Dlatego pole tego trapezu wynosi $\frac{1+6}{2} \cdot 2$.

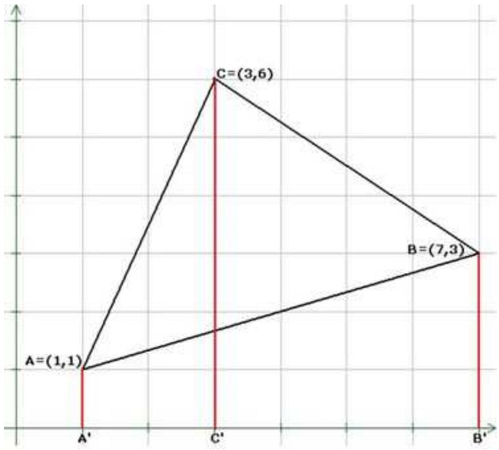
Pole CC'B'B to pole trapezu pomalowanego na żółto. Podstawy tego trapezu to odcinki CC' i BB', a wysokość to odcinek B'C'. Dlatego pole tego trapezu wynosi $\frac{6+3}{2} \cdot 4$.

Suma pól tych trapezów daje pole pięciokąta A'B'BCA. Aby obliczyć pole trójkąta ABC, należy od pola pięciokąta odjąć pole trapezu A'B'BA. W tym trapezie podstawami są odcinki AA' i BB', a wysokością odcinek A'B'. Dlatego pole tego trapezu wynosi $\frac{1+3}{2} \cdot 6$.

Jeżeli wcześniej tego nie wiedziałeś, to może teraz spróbuj obliczyć pole podanego trójkąta ABC. Sporządź najpierw rysunek.

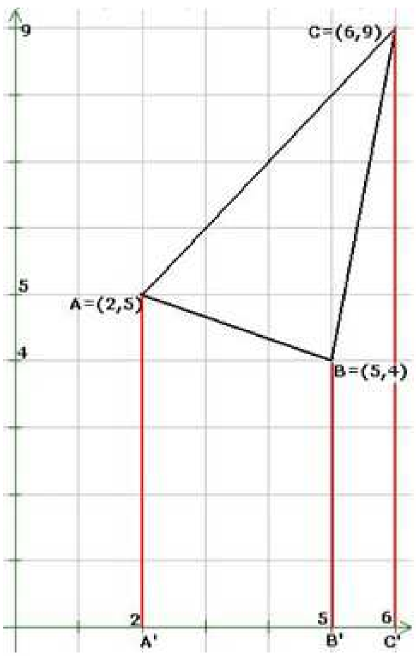
Zadanie 4 – krok 2

Pole trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C należących do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych można obliczyć wykorzystując wzór na pole trapezu.



$$P_{\Delta ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B} = \frac{1+6}{2} \cdot 2 + \frac{6+3}{2} \cdot 4 - \frac{1+3}{2} \cdot 6 =$$
$$= 7 + 18 - 12 = 13$$

Prześledź ten przykład i w analogiczny sposób oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A = (2,5), B = (5,4), C = (6,9)$.

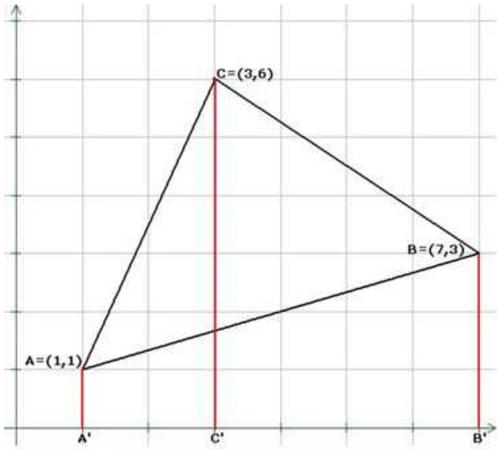


Sytuacja jest trochę inna, niż w podanym przykładzie. Być może będziesz miał problemy...

Spróbuj obliczyć pole trójkąta ABC, a potem przejdź do następnej strony.

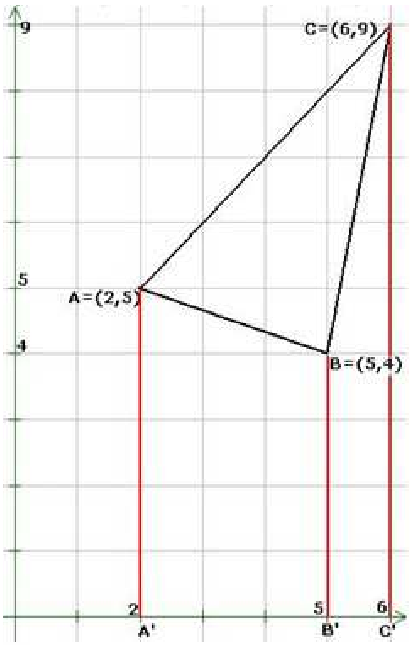
Zadanie 4 – krok 3

Pole trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C należących do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych można obliczyć wykorzystując wzór na pole trapezu.



$$P_{\Delta ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B} = \frac{1+6}{2} \cdot 2 + \frac{6+3}{2} \cdot 4 - \frac{1+3}{2} \cdot 6 =$$
$$= 7 + 18 - 12 = 13$$

Prześledź ten przykład i w analogiczny sposób oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A = (2{,}5), B = (5{,}4), C = (6{,}9)$.



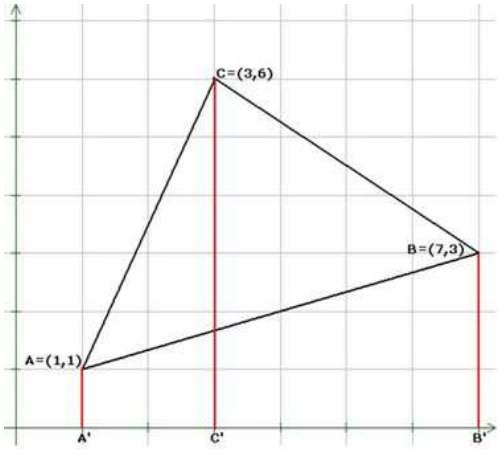
Teraz trzeba:

1. Obliczyć pole trapezu A'C'CA.
2. Od obliczonego pola odjąć sumę pól trapezów A'B'BA i B'C'CB.

Wykonaj to, a potem przejdź do następnej strony.

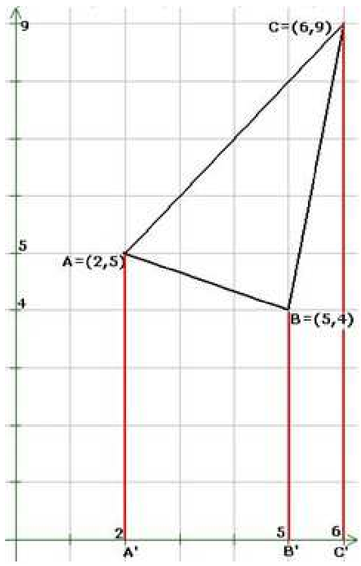
Zadanie 4 – krok 4

Pole trójkąta o danych wierzchołkach A, B, C należących do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych można obliczyć wykorzystując wzór na pole trapezu.



$$P_{\Delta ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B} = \frac{1+6}{2} \cdot 2 + \frac{6+3}{2} \cdot 4 - \frac{1+3}{2} \cdot 6 =$$
$$= 7 + 18 - 12 = 13$$

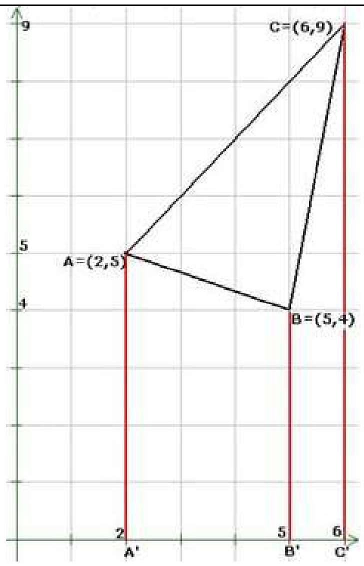
Prześledź ten przykład i w analogiczny sposób oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A = (2,5), B = (5,4), C = (6,9)$.



Liczymy:

$$P_{\Delta ABC} = P_{A'C'CC} - P_{B'C'CB} - P_{A'B'BA} = \frac{5+9}{2} \cdot 4 - \frac{4+9}{2} \cdot 1 - \frac{5+4}{2} \cdot 3 =$$
$$= 28 - \frac{13}{2} - \frac{27}{2} = 8$$

Pełne rozwiązanie zadania:



Należy:

1. Obliczyć pole trapezu A'C'CA.
2. Od obliczonego pola odjąć sumę pól trapezów A'B'BA i B'C'CB.

$$P_{\Delta ABC} = P_{A'C'CC} - P_{B'C'CB} - P_{A'B'BA} = \frac{5+9}{2} \cdot 4 - \frac{4+9}{2} \cdot 1 - \frac{5+4}{2} \cdot 3 =$$

$$= 28 - \frac{13}{2} - \frac{27}{2} = 8$$

Zadanie 5.

Wyznacz liczbę składników w sumie: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 449$ i oblicz tę sumę.

Rozwiązanie krok po kroku:

Pierwsze myśli po przeczytaniu tematu zadania?
Zapisz choć parę słów, jak zamierzasz zabrać się za rozwiązywanie tego zadania, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 5 – krok 1

Wyznacz liczbę składników w sumie: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 449$ i oblicz tę sumę.

Pierwsza rzecz, którą powinieneś zrobić, to uważnie przyjrzeć się liczbom, które są dodawane.
Kolejno mamy: 2, 5, 8, 11, ...
Każda następna liczba jest o 3 większa od poprzedniej. Mamy więc do czynienia z sumą nieznanej ilości wyrazów ciągu arytmetycznego.
Jak to wykorzystać?

Wypisz wszystkie informacje na temat sumowanego ciągu, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 5 – krok 2

Wyznacz liczbę składników w sumie: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 449$ i oblicz tę sumę.

Pierwszy wyraz tego ciągu: $a_1 = 2$
Różnica ciągu: $r = 3$
Ostatni sumowany wyraz (nie wiemy - który): $a_n = 449$
Co oprócz tego powinieneś wiedzieć o ciągu arytmetycznym?

Zapisz, co wiesz, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 5 – krok 3

Wyznacz liczbę składników w sumie: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 449$ i oblicz tę sumę.

Powinieneś znać wzory:

Na n-ty wyraz ciągu: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
Na sumę n początkowych wyrazów: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Sumę możemy obliczyć, gdy znamy ilość sumowanych wyrazów.
Wobec tego należy najpierw obliczyć liczbę składników w sumie.

Spróbuj to zrobić, a potem, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 5 – krok 4

Wyznacz liczbę składników w sumie: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 449$ i oblicz tę sumę.

Liczbę składników w sumie obliczymy za pomocą wzoru na n-ty wyraz ciągu:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
Dane są: $a_n = 449$, $a_1 = 2$, $r = 3$
Niewiadoma jest tylko n - liczba składników sumy. Liczymy:
$449 = 2 + (n - 1) \cdot 3$
$447 = (n - 1) \cdot 3$
$\frac{447}{3} = n - 1$
$n - 1 = 149$
$n = 150$
Wszystkich składników w sumie jest 150.

Oblicz teraz sumę, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 5 – krok 5

Wyznacz liczbę składników w sumie: $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 449$ i oblicz tę sumę.

Korzystamy oczywiście ze wzoru: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$S_{150} = \frac{2 + 449}{2} \cdot 150 = 451 \cdot 75 = 33825$$

Pełne rozwiązanie zadania:

Mamy do czynienia z sumą nieznanej ilości wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym: $a_1 = 2,\ r = 3,\ a_n = 449$

$449 = 2 + (n - 1) \cdot 3$
$447 = (n - 1) \cdot 3$
$\frac{447}{3} = n - 1$
$n - 1 = 149$
$n = 150$
Wszystkich składników w sumie jest 150.

$$S_{150} = \frac{2 + 449}{2} \cdot 150 = 451 \cdot 75 = 33825$$

Szukana wartość sumy wynosi 33825.

Zadanie 6.

Odcinek AB, gdzie $A = (-2,4)$ i $B = (6,2)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego. Trzeci wierzchołek należy do osi OY. Wyznacz współrzędne tego wierzchołka.

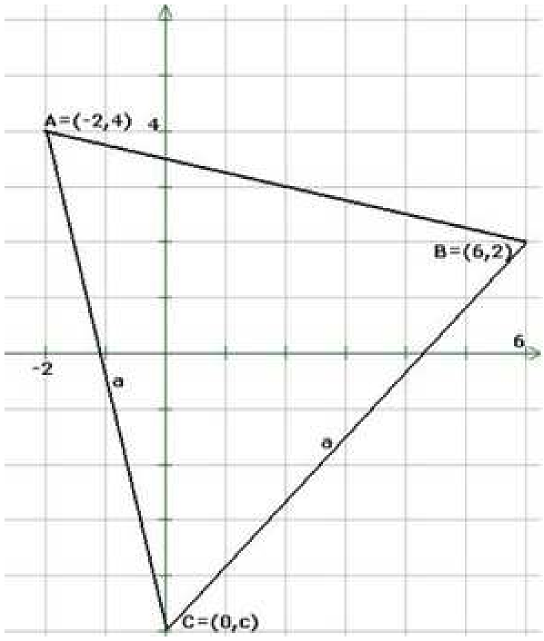
Rozwiązanie krok po kroku:

Zaczynamy oczywiście od odpowiedniego rysunku.

Wykonaj go, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 6 – krok 1

Odcinek AB, gdzie $A = (-2{,}4)\ i\ B = (6{,}2)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego. Trzeci wierzchołek należy do osi OY. Wyznacz współrzędne tego wierzchołka.



Dlaczego na odcinkach AC i BC należy zapisać tę samą literę a?
Bo AB jest podstawą trójkąta równoramiennego.
Dlaczego punkt C ma współrzędne (0,c)?
Bo każdy punkt leżący na osi OY ma pierwszą współrzędną równą 0.

Należy obliczyć współrzędne punktu C. Pierwszą współrzędną mamy już z głowy. Jak obliczyć drugą?

Spróbuj to zrobić, a potem przejdź do następnej strony

Zadanie 6 – krok 2

Odcinek AB, gdzie $A = (-2{,}4)\ i\ B = (6{,}2)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego. Trzeci wierzchołek należy do osi OY. Wyznacz współrzędne tego wierzchołka.

Należy skorzystać z faktu, że $|AC| = |BC|$. Liczymy długości tych odcinków:

$|AC| = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-c)^2} = \sqrt{4 + 16 - 8c + c^2} = \sqrt{c^2 - 8c + 20}$

$|BC| = \sqrt{(6-0)^2 + (2-c)^2} = \sqrt{36 + 4 - 4c + c^2} = \sqrt{c^2 - 4c + 40}$

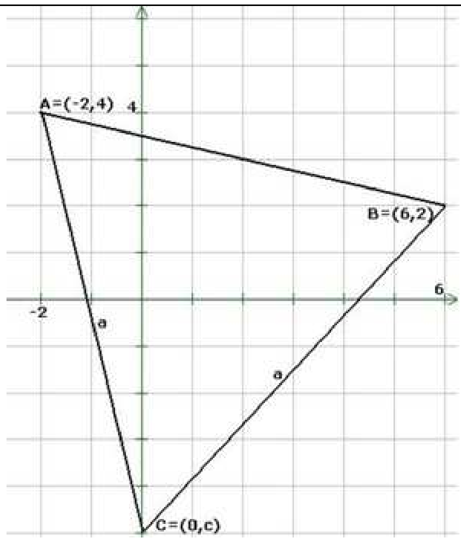
$|AC| = |BC|$

$\sqrt{c^2 - 8c + 20} = \sqrt{c^2 - 4c + 40}$

$c^2 - 8c + 20 = c^2 - 4c + 40 \quad \Leftrightarrow \quad -8c + 4c = 20 \quad \Leftrightarrow \quad -4c = 20 \quad \Leftrightarrow \quad c = -5$

Szukane współrzędne wierzchołka C: $(0, -5)$.

Pełne rozwiązanie zadania:



$|AC| = |BC|$

Liczymy długości tych odcinków:

$|AC| = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-c)^2} = \sqrt{4 + 16 - 8c + c^2} = \sqrt{c^2 - 8c + 20}$

$|BC| = \sqrt{(6-0)^2 + (2-c)^2} = \sqrt{36 + 4 - 4c + c^2} = \sqrt{c^2 - 4c + 40}$

$|AC| = |BC|$

$\sqrt{c^2 - 8c + 20} = \sqrt{c^2 - 4c + 40}$

$c^2 - 8c + 20 = c^2 - 4c + 40$

$-8c + 4c = 20$

$-4c = 20$

$c = -5$

Szukane współrzędne wierzchołka C: $(0, -5)$.

Zadanie 7.

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

Rozwiązanie krok po kroku:

Nierówność może rozwiążemy.
Jak jednak uzasadnić, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań?

Napisz odpowiedź na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 7 – krok 1

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

Odpowiedź jest prosta: jeżeli będziemy znali rozwiązanie nierówności, to będziemy wiedzieli, jakie liczby naturalne ją spełniają. Możemy je wtedy policzyć.
Bierzemy się za rozwiązywanie nierówności.

Spróbuj ją rozwiązać, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 7 – krok 2

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

Próbujemy zapisać lewą stronę nierówności w postaci iloczynu:
$x^2(-x + 2005) + 2(x - 2005) \geq 0$

Niestety, ale nawiasy nie są jednakowe. Może inaczej:
$-x^2(x - 2005) + 2(x - 2005) \geq 0$

Teraz nawiasy są identyczne, więc wyłączamy nawias przed nawias:
$(x - 2005)(-x^2 + 2) \geq 0$
$(x - 2005)(2 - x^2) \geq 0$
$(x - 2005)\left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + x\right) \geq 0$

Co dalej? Zapisz dalszą część rozwiązania, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 7 – krok 3

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

Teraz należy wyznaczyć miejsca zerowe wielomianu, naszkicować jego wykres i z wykresu odczytać rozwiązanie nierówności.

Miejsca zerowe:
$x_1 = 2005,\;\; x_2 = \sqrt{2},\;\; x_3 = -\sqrt{2}$

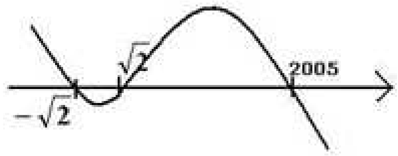
Teraz naszkicuj wykres, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 7 – krok 4

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

Patrzymy na współczynnik przy najwyższej potędze (x^3): jest ujemny, więc wykres zaczynamy rysować od zaznaczonego na niebiesko punktu:

Rysujemy:



Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności.

Wykonaj to, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 7 – krok 5

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

Wartości wielomianu mają być większe lub równe zero, więc do zbioru rozwiązań należą te wartości x, które odpowiadają fragmentom wykresu leżącym nad osią i na osi:
$x \in (-\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle\sqrt{2}, 2005\rangle$

Teraz należy jeszcze uzasadnić, że nierówność ma w zbiorze liczb naturalnych mniej niż 2005 rozwiązań.

Napisz uzasadnienie, a potem przejdź do następnej strony.

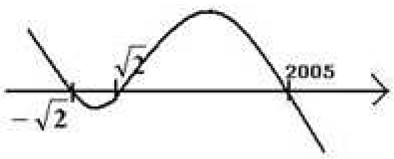
Zadanie 7 – krok 6

Rozwiąż nierówność $-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$ i uzasadnij, że ma ona w zbiorze liczb naturalnych mniej, niż 2005 rozwiązań.

$x \in (-\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle\sqrt{2}, 2005\rangle$
$\sqrt{2} \cong 1{,}4$, wobec tego liczby naturalne spełniające nierówność to: 2,3,4,5,...,2005.
Jest ich 2004, czyli mniej, niż 2005, co należało uzasadnić.

Pełne rozwiązanie zadania:

$-x^3 + 2005x^2 + 2x - 4010 \geq 0$
$-x^2(x - 2005) + 2(x - 2005) \geq 0$
$(x - 2005)(-x^2 + 2) \geq 0$
$(x - 2005)(2 - x^2) \geq 0$
$(x - 2005)(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) \geq 0$
$x_1 = 2005, \ \ x_2 = \sqrt{2}, \ \ x_3 = -\sqrt{2}$

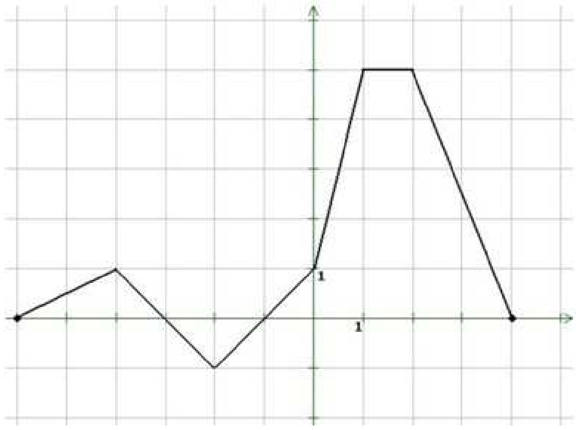


Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle\sqrt{2}, 2005\rangle$
$\sqrt{2} \cong 1{,}4$, wobec tego liczby naturalne spełniające nierówność to: 2,3,4,5,...,2005.
Jest ich 2004, czyli mniej, niż 2005, co należało uzasadnić.

Zadanie 8.

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f: X \to Y$ (jest to cały wykres funkcji).
Posługując się wykresem wyznacz:

a. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
b. Przedziały, w których funkcja maleje.
c. Miejsca zerowe funkcji.
d. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
e. $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{2}\right), f(-4)$



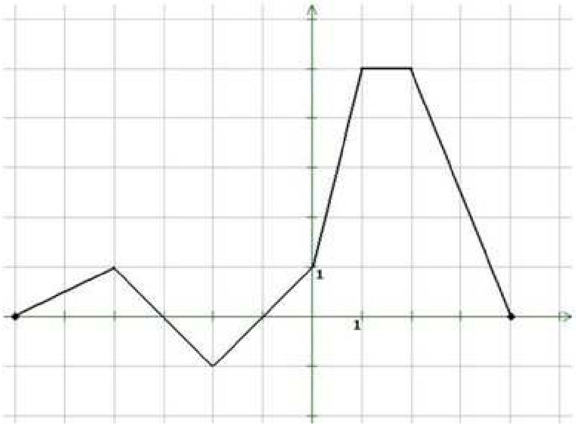
Rozwiązanie krok po kroku:

Wykonaj punkt a, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 8 – krok 1

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f: X \to Y$ (jest to cały wykres funkcji).
Posługując się wykresem wyznacz:

a. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
b. Przedziały, w których funkcja maleje.
c. Miejsca zerowe funkcji.
d. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
e. $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{2}\right), f(-4)$



Zapis $f: X \to Y$ oznacza, że dziedziną funkcji jest zbiór X, a zbiór wartości zawiera się w zbiorze Y.
Odczytujemy z wykresu, jakim wartościom x odpowiadają punkty wykresu (zbiór tych x jest dziedziną funkcji): $D_f = \langle -6, 4 \rangle$

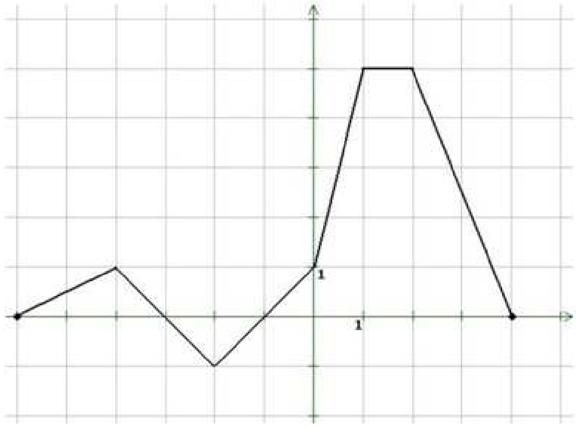
Następnie odczytujemy, jakim wartościom y odpowiadają punkty wykresu (zbiór tych y jest zbiorem wartości funkcji): $Z_w = \langle -1,5 \rangle$

Wykonaj teraz punkt b, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 8 – krok 2

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f: X \to Y$ (jest to cały wykres funkcji).
Posługując się wykresem wyznacz:

a. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
b. Przedziały, w których funkcja maleje.
c. Miejsca zerowe funkcji.
d. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
e. $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{2}\right), f(-4)$



Z odczytaniem przedziałów monotoniczności funkcji zazwyczaj nie ma problemów:

Funkcja rośnie w przedziałach: $\langle -6, -4 \rangle, \langle -2, 1 \rangle$

Funkcja maleje w przedziałach: $\langle -4, -2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle$

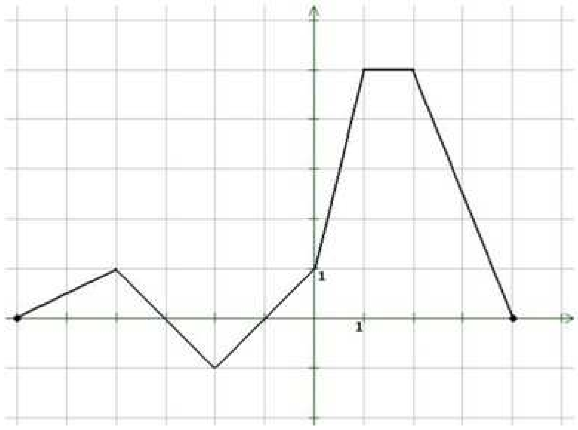
Funkcja jest stała w przedziale: $\langle 1, 2 \rangle$

Wykonaj teraz punkt c, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 8 – krok 3

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f: X \to Y$ (jest to cały wykres funkcji).
Posługując się wykresem wyznacz:

a. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
b. Przedziały, w których funkcja maleje.
c. Miejsca zerowe funkcji.
d. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
e. $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{2}\right), f(-4)$



Miejsca zerowe to takie wartości argumentu (x), dla których wartość funkcji (y) wynosi 0. Szukamy więc takich punktów wykresu, które mają współrzędne $(x, 0)$, czyli leżących na osi OX.

Mamy cztery takie punkty: $(-6{,}0), (-3{,}0), (-1{,}0), (4{,}0)$.

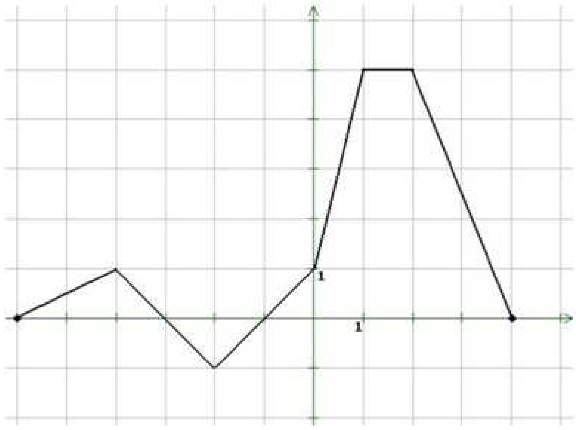
Dlatego funkcja ma cztery miejsca zerowe: $-6, -3, -1$ i 4.

Wykonaj teraz punkt d, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 8 – krok 4

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f\colon X \to Y$ (jest to cały wykres funkcji).
Posługując się wykresem wyznacz:

a. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
b. Przedziały, w których funkcja maleje.
c. Miejsca zerowe funkcji.
d. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
e. $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{2}\right), f(-4)$



Wartości x należą do dziedziny funkcji - są to argumenty funkcji.
Wartości y należące do zbioru wartości funkcji - są to wartości funkcji.

Zwrot "wartości dodatnie" czytamy więc: "y dodatnie".
Wyszukujemy na wykresie te jego fragmenty, dla których y (czyli druga współrzędna punktu wykresu) jest dodatnia i podajemy, dla jakich x to zachodzi.
Nie zapominamy przy tym, że zero nie jest liczbą dodatnią.

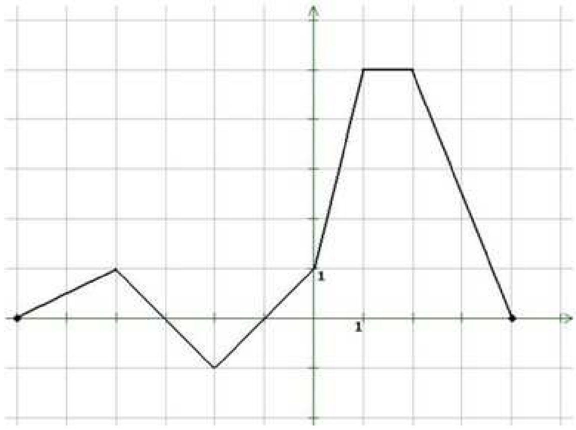
Funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach: $(-6,-3)$ i $(-1,4)$.

Wykonaj teraz punkt e, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 8 – krok 5

Rysunek przedstawia wykres funkcji $f: X \to Y$ (jest to cały wykres funkcji).
Posługując się wykresem wyznacz:

a. Dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
b. Przedziały, w których funkcja maleje.
c. Miejsca zerowe funkcji.
d. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
e. $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{2}\right), f(-4)$



Co oznacza zapis $f(x)$?
Taki zapis to: "Wartość funkcji f dla argumentu x", czyli y odpowiadający temu x-owi.
Wobec tego $f(0)$ jest drugą współrzędną tego punktu wykresu, którego pierwsza współrzędna jest równa 0.
Odczytujemy, że do wykresu funkcji należy punkt (0,1), czyli $f(0) = 1$.

Podobnie odczytujemy, że:
$f(-2) = -1, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 5, \quad f(-4) = 1$

Pełne rozwiązanie zadania:

a) Dziedzina funkcji: $D_f = \langle -6, 4 \rangle$; zbiór wartości funkcji: $Z_w = \langle -1,5 \rangle$
b) Funkcja maleje w przedziałach: $\langle -4, -2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle$
c) Funkcja ma cztery miejsca zerowe: $-6, -3, -1$ i 4
d) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach: $(-6, -3)$ i $(-1,4)$
e) $f(0) = 1, \; f(-2) = -1, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 5, \quad f(-4) = 1$

Zadanie 9.

Każdą z 20 kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci.
Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie.
Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.

Rozwiązanie krok po kroku:

Co wynika z wykresu?

Zapisz dokładnie swoje wnioski, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 9 – krok 1

Każdą z 20 kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci.
Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie.
Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.

Z wykresu wynika, że:

1. 4 kobiety mają 0 dzieci.
2. 5 kobiet ma 1 dziecko.
3. 6 kobiet ma 2 dzieci.
4. 2 kobiety mają 3 dzieci.
5. 2 kobiety mają 4 dzieci.
6. 1 kobieta ma 5 dzieci.

Razem daje to: $4 + 5 + 6 + 2 + 2 + 1 = 20$ kobiet, oraz
$4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 36$ dzieci

Jak obliczyć średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę?

Spróbuj to zrobić, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 9 – krok 2

Każdą z 20 kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci.
Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie.
Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.

Średnia liczba dzieci posiadanych przez jedną kobietę obliczymy dzieląc liczbę wszystkich dzieci przez liczbę wszystkich kobiet:

$\bar{x} = \frac{36}{20} = \frac{18}{10} = 1{,}8$

Jak teraz obliczyć odchylenie standardowe liczby dzieci? Zapisz odpowiedni wzór, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 9 – krok 3

Każdą z 20 kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci.
Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie.
Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.

Odchylenie standardowe liczymy według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

lub

$$\sigma = \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}-(\bar{x})^2}$$

gdzie $\bar{x}$ to obliczona wcześniej średnia, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ - to ilości dzieci u wszystkich 20 kobiet ($n = 20$).
Zazwyczaj lepiej jest liczyć odchylenie standardowe drugim wzorem, bo obliczenia są prostsze.

Spróbuj to jednak wykonać obydwoma wzorami, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 9 – krok 4

Każdą z 20 kobiet zapytano o liczbę posiadanych dzieci.
Otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie.
Oblicz średnią liczbę dzieci posiadanych przez jedną kobietę oraz odchylenie standardowe liczby dzieci.

Suma ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$ jest w naszym przypadku następująca:
$0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 +$
$+3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2$
Tak nie będziemy liczyć, bo można prościej: $4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2$
Mamy więc:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2}{20} - (1{,}8)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 24 + 18 + 32 + 25}{20} - (1{,}8)^2} = \sqrt{\frac{104}{20} - 3{,}24} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

Odchylenie standardowe liczby dzieci wynosi 1,4.

Pełne rozwiązanie zadania:

Z wykresu wynika, że 4 kobiety mają 0 dzieci, 5 kobiet ma 1 dziecko, 6 kobiet ma 2 dzieci, 2 kobiety mają 3 dzieci, 2 kobiety mają 4 dzieci, 1 kobieta ma 5 dzieci.
Razem daje to: $4 + 5 + 6 + 2 + 2 + 1 = 20$ kobiet, oraz
$4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 36$ dzieci
Średnia liczba dzieci posiadanych przez jedną kobietę: $\bar{x} = \frac{36}{20} = \frac{18}{10} = 1{,}8$
Odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 5^2}{20} - (1{,}8)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 24 + 18 + 32 + 25}{20} - (1{,}8)^2} = \sqrt{\frac{104}{20} - 3{,}24} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

Odchylenie standardowe liczby dzieci wynosi 1,4.

Zadanie 10.

Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i umie pisać.

a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać?

Rozwiązanie krok po kroku:

Nie ma żadnych danych odnośnie ilości krasnoludków, tylko wielkości procentowe.
Poza tym 70%, 40% i 30% daje w sumie 140%.
Co z tym poczniesz?

Spróbuj sobie poradzić z tymi procentowymi danymi, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 10 – krok 1

Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i umie pisać.

a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać?

Zwróć uwagę, że krasnoludek, który umie czytać i umie pisać jest jednocześnie:

- krasnoludkiem, który umie czytać,
- krasnoludkiem, który umie pisać.

Może teraz już wiesz jak sobie z tym poradzić?

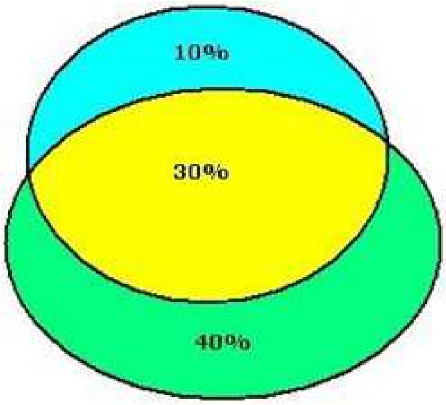
Spróbuj, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 10 – krok 2

Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i umie pisać.

a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać?

Sytuację można zilustrować tak:



Na żółto: 30% krasnoludków, którzy umieją czytać i umieją pisać.
Na zielono: 40% krasnoludków, którzy umieją tylko czytać (a nie umieją pisać).
Na niebiesko: 10% krasnoludków, którzy umieją tylko pisać (a nie umieją czytać).

Jak teraz obliczyć szukane prawdopodobieństwa zdarzeń?

Spróbuj, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 10 – krok 3

Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i umie pisać.

a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać?

Nie można jeszcze liczyć prawdopodobieństw, bo coś tu się nie zgadza: 40%+30%+10%=80%. A gdzie brakujące 20%?

Odpowiedz na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 10 – krok 4

Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i umie pisać.

a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać?

Pozostałe 10% krasnoludków, to krasnoludki, które nie umieją ani pisać, ani czytać.

Mamy:

- 40% krasnoludków, którzy umieją tylko czytać.
- 10% krasnoludków, którzy umieją tylko pisać.
- 30% krasnoludków, którzy umieją czytać i umieją pisać.
- 20% krasnoludków, którzy nie umieją ani pisać, ani czytać.

Oblicz teraz szukane prawdopodobieństwa, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 10 – krok 5

Zgodnie z najnowszymi badaniami 70% krasnoludków umie czytać, 40% umie pisać, natomiast 30% krasnoludków umie czytać i umie pisać.

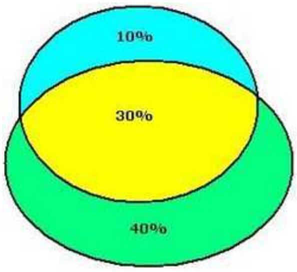
a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać?
b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać?

Oznaczmy zdarzenia:
A - losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać
B - losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać

$$P(A) = \frac{10}{100} = 0{,}1\ ,\quad P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Pełne rozwiązanie zadania:

Sytuację można zilustrować tak:



Na żółto: 30% krasnoludków, którzy umieją czytać i umieją pisać.
Na zielono: 40% krasnoludków, którzy umieją tylko czytać (a nie umieją pisać).
Na niebiesko: 10% krasnoludków, którzy umieją tylko pisać (a nie umieją czytać).
Mamy:

- 40% krasnoludków, którzy umieją tylko czytać.
- 10% krasnoludków, którzy umieją tylko pisać.
- 30% krasnoludków, którzy umieją czytać i umieją pisać.
- Pozostałe 20% krasnoludków, którzy nie umieją ani pisać, ani czytać.

Oznaczmy zdarzenia:
A - losowo wybrany krasnoludek umie pisać, ale nie umie czytać
B - losowo wybrany krasnoludek nie umie ani pisać, ani czytać

$$P(A) = \frac{10}{100} = 0{,}1\ ,\quad P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Zadanie 11.

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie krok po kroku:

Wykonaj rysunek ilustrujący sytuację przedstawioną w zadaniu, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 11 – krok 1

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Czy pamiętałeś o tym, by zaznaczyć na rysunku dane?
Czy pamiętałeś o tym, by szukane (oraz dane, których nie da się zaznaczyć na rysunku) zapisać za pomocą odpowiednich wzorów?
To jest bardzo ważne!

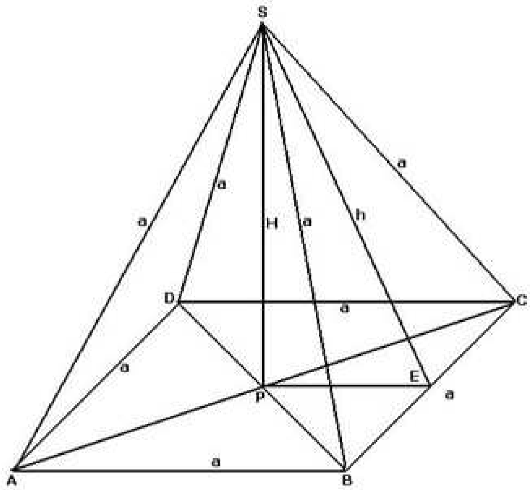
Sprawdź, ewentualnie uzupełnij, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 11 – krok 2

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Oto rysunek i zapisy, które powinieneś umieścić obok rysunku:



$8a = 48$ czyli $a = 6$
Należy obliczyć:

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 36 + 2 \cdot 6h = 36 + 12h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot H = 12H$$

Jak widać, żeby napisać wzór na pole powierzchni, trzeba narysować wysokość ściany bocznej. Przy okazji należy dorysować odcinek PE - powstał trójkąt prostokątny PES.

Zwróć uwagę, że zapisanie za pomocą wzoru danej 48cm dało natychmiastowe obliczenie długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Po wstawieniu obliczonej wartości a do wzorów na pole powierzchni i objętość okazało się, że należy obliczyć długości dwóch odcinków: h oraz H.
Spróbuj je obliczyć, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 11 – krok 3

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Jeżeli zapisałeś równanie (trójkąt PES):

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$$

to dobrze. Mamy $\frac{a}{2} = 3$ co daje $9 + H^2 = h^2$

Otrzymane równanie jest równaniem z dwiema niewiadomymi.
Potrzebujemy drugiego równania.

Poszukaj go, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 11 – krok 4

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Wiesz jak szybko obliczyć długość przekątnej kwadratu? (to jest podpowiedź...).

Spróbuj teraz, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 11 – krok 5

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Długość przekątnej kwadratu o boku a liczymy za pomocą wzoru: $d = a\sqrt{2}$.
W tym zadaniu: $|AC| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$|AP| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = 3\sqrt{2}$

W trójkącie APS:
$|AP|^2 + H^2 = a^2$
$\left(3\sqrt{2}\right)^2 + H^2 = 6^2$
$H^2 = 36 - 9 \cdot 2 = 18$
$H = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Co teraz? Odpowiedz na to pytanie, a potem przejdź do następnej strony.

Zadanie 11 – krok 6

Z drutu o długości 48cm wykonano szkielet ostrosłupa czworokątnego prawidłowego o wszystkich krawędziach równych.

a. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.
b. Oblicz objętość ostrosłupa.

Teraz wykorzystamy zapisane wcześniej równanie: $9 + H^2 = h^2$:

$9 + 18 = h^2$

$h^2 = 27$

$h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Kończymy, wstawiając otrzymane wartości do wzorów na pole powierzchni i objętość:

$P = 36 + 12h = 36 + 12 \cdot 3\sqrt{3} = 36 + 36\sqrt{3} = 36(1 + \sqrt{3})$

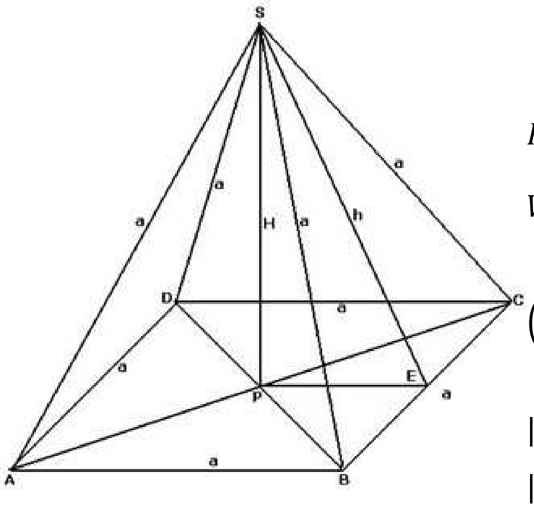
$V = 12H = 12 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

Podajemy odpowiedź:

Pole powierzchni ostrosłupa wynosi $36(1 + \sqrt{3})\ cm^2$

Objętość ostrosłupa wynosi $36\sqrt{2}\ cm^3$

Pełne rozwiązanie zadania:



$8a = 48$ czyli $a = 6$

Należy obliczyć:

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 36 + 2 \cdot 6h = 36 + 12h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot H = 12H$$

W trójkącie PES:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$$

$\frac{a}{2} = 3$ co daje $9 + H^2 = h^2$

$|AC| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$$|AP| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = 3\sqrt{2}$$

W trójkącie APS:

$|AP|^2 + H^2 = a^2$

$(3\sqrt{2})^2 + H^2 = 6^2$

$H^2 = 36 - 9 \cdot 2 = 18$

$H = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$9 + H^2 = h^2$:
$9 + 18 = h^2$
$h^2 = 27$
$h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
$P = 36 + 12h = 36 + 12 \cdot 3\sqrt{3} = 36 + 36\sqrt{3} = 36\left(1 + \sqrt{3}\right)$
$V = 12H = 12 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

Pole powierzchni ostrosłupa wynosi $36\left(1 + \sqrt{3}\right)\ cm^2$
Objętość ostrosłupa wynosi $36\sqrt{2}\ \ cm^3$