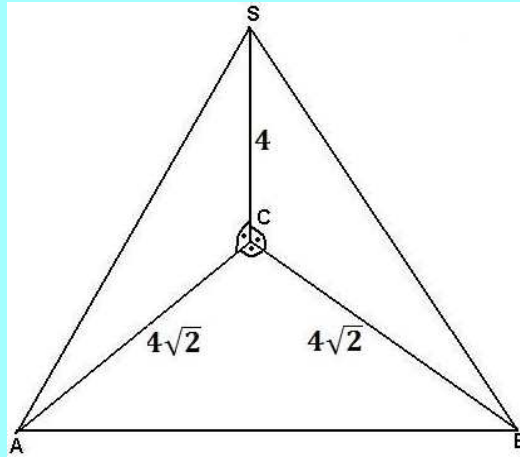


## Kula wpisana w ostrosłup

### ZADANIE:

Oblicz długość promienia kuli wpisanej w ostrosłup ABCS wykorzystując dane przedstawione na rysunku.



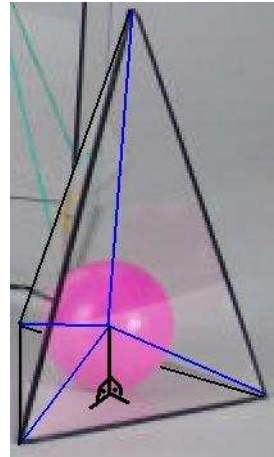
Wyobraźmy sobie kulę wpisaną w ostrosłup:  
Taka kula jest oczywiście styczna do wszystkich ścian ostrosłupa.



Jeżeli z punktów styczności poprowadzimy promienie, to będą one prostopadłe do ścian ostrosłupa.



Połączmy teraz środek kuli ze wszystkimi wierzchołkami ostrosłupa. W ten sposób podzielimy ostrosłup na cztery ostrosłupy, których podstawami są ściany wyjściowego ostrosłupa, a wysokościami – promienie kuli.



Oznaczmy:

$P_1, P_2, P_3, P_4$  - pola powierzchni ścian ostrosłupa,

$r$  - długość promienia kuli

Obliczymy objętość ostrosłupa, jako sumę objętości czterech ostrosłupów powstałych w wyniku opisanego wyżej podziału:

$$V = \frac{1}{3}P_1 \cdot r + \frac{1}{3}P_2 \cdot r + \frac{1}{3}P_3 \cdot r + \frac{1}{3}P_4 \cdot r = \frac{1}{3}r \cdot (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

Otrzymaliśmy wzór:

$$V = \frac{1}{3}r \cdot P$$

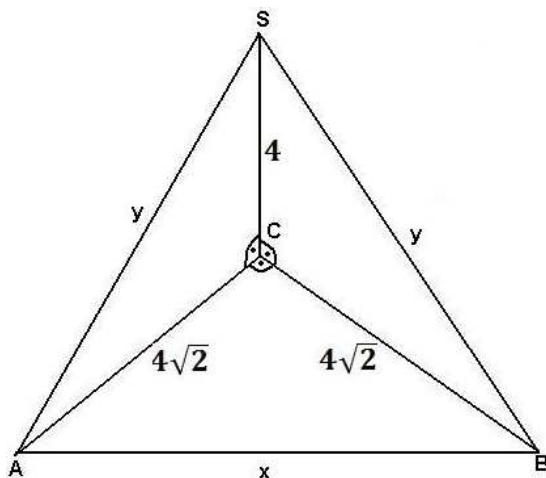
gdzie:

$V$  - objętość ostrosłupa

$r$  - długość promienia kuli wpisanej w ostrosłup

$P$  - pole powierzchni ostrosłupa

Wracamy teraz do zadania.



$$\begin{aligned} x^2 &= (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 \\ x^2 &= 16 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 64 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= (4\sqrt{2})^2 + 4^2 \\ y^2 &= 16 \cdot 2 + 16 = 16 \cdot 3 \\ y &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Objętość ostrosłupa:

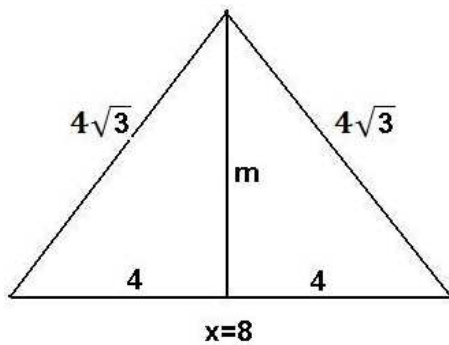
$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{\Delta ABC} \cdot |CS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{64}{3}$$

Wiemy, że objętość ostrosłupa można też obliczyć za pomocą wzoru  $V = \frac{1}{3}r \cdot P$

$$V = \frac{1}{3}r \cdot (P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS} + P_{\Delta ACS})$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 = 16$$

$P_{\Delta ABS}$ :



$$m^2 = (4\sqrt{3})^2 - 4^2 = 16 \cdot 3 - 16 = 16 \cdot 2$$

$$m = 4\sqrt{2}$$

$$P_{\Delta ABS} = 4m = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$P_{\Delta BCS} = P_{\Delta ACS} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}r \cdot (P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS} + P_{\Delta ACS})$$

$$V = \frac{1}{3}r \cdot (16 + 16\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2})$$

$$V = \frac{1}{3}r \cdot (16 + 32\sqrt{2})$$

$$V = \frac{16}{3}r \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$

Obliczyliśmy wcześniej:  $V = \frac{64}{3}$

$$\frac{64}{3} = \frac{16}{3}r \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$

$$4 = r \cdot (1 + 2\sqrt{2})$$

$$r = \frac{4}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2\sqrt{2} - 1)}{(2\sqrt{2} + 1) \cdot (2\sqrt{2} - 1)} = \frac{4 \cdot (2\sqrt{2} - 1)}{8 - 1} = \frac{4}{7}(2\sqrt{2} - 1)$$