

Matura próbna marzec 2004 r.

Profil mat-fiz

Zadanie 1 (8 punktów)

Dane jest równanie: $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ z niewiadomą x i parametrem $m \in R$.

- Dla jakich wartości parametru m równanie ma cztery różne pierwiastki rzeczywiste?
- Dla jakich wartości parametru m suma czterech pierwiastków równania wynosi 0 i tworzą one ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 2$?

Zadanie 2 (10 punktów)

Dana jest funkcja:

$$f(x) = 4 - 2x + \frac{4 - 2x}{x + 3} + \frac{4 - 2x}{(x + 3)^2} + \frac{4 - 2x}{(x + 3)^3} + \dots \text{(suma nieskończonego ciągu geometrycznego)}$$

- Wyznacz dziedzinę funkcji f .
- Zbadaj, czy istnieje styczna do wykresu funkcji f , która jest równoległa do prostej o równaniu $y = -2x - 2$
- Wyznacz asymptotę ukośną funkcji f .

Zadanie 3 (10 punktów)

Punkt $A = (4, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC o obwodzie równym $10 + 4\sqrt{5}$. Prosta $l: x - 2y = 0$ jest osią symetrii tego trójkąta.

- Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C .
- Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie ABC do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 4 (10 punktów)

Z pudełka zawierającego n pustych losów i trzy losy wygrywające będziemy losować jednocześnie trzy losy. Zmienna losowa X oznacza liczbę losów wygrywających wśród wybranych losów.

- Ile jest wszystkich losów, jeżeli wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi $\frac{1}{2}$?
- Oblicz wariancję zmiennej losowej X .

Zadanie 5 (12 punktów)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$. Punkt M jest środkiem wysokości tego ostrosłupa. Niech x równa się odległości punktu M od krawędzi bocznej ostrosłupa, a y równa się odległości punktu M od ściany bocznej tego ostrosłupa.

- Wyznacz objętość ostrosłupa w zależności od x i y oraz sprawdź, czy istnieje ostrosłup, w którym $x = 2 \wedge y = 1$.
- Oblicz cosinus kąta między wysokościami sąsiednich ścian bocznych, poprowadzonymi z wierzchołka S ostrosłupa.