

Matura próbna 2003 (OKE Kraków)
Zestaw M I – profil matematyczno-fizyczny

Zadanie 1. (8 pkt)

Dane są zbiory:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge (2^{x+1} - 3^{x+1})^2 \leq 6^x\},$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge \log_{|x|} 2 < 1\}.$$

Wyznacz zbiory A, B i $A \cap B$.

Zadanie 2. (10 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = m^2 x^2 - 3mx + 4 - 2m$.

- a) Dla jakich wartości parametru m funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe większe od 1 ?
- b) Rozwiąż równanie $4x^2 - 3x - 1 = 0$ oraz zbadaj liczbę wspólnych rozwiązań tego równania i równania $f(x) = 0$ w zależności od parametru m.

Zadanie 3. (10 pkt)

Dany jest punkt $P=(1,4)$.

- a) Przez środek okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 8x = 0$ i punkt P przechodzi prosta l, która przecina okrąg w punktach A i B. Wyznacz pole trójkąta ABO, gdzie O oznacza początek układu współrzędnych.
- b) Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt P i odcinającej na dodatnich półosiach układu XOY odcinki, których suma długości jest najmniejsza.

Zadanie 4. (10pkt)

Wpisowe za udział w grze polegającej na trzykrotnym rzucie symetryczną kostką wynosi 2 zł.

Jeśli najmniejszą wyrzuconą liczbą oczek jest:

- 1, to gracz nic nie wygrywa
- 2, to grający wygrywa 1 zł
- 3, to grający wygrywa 2 zł
- 4, to grający wygrywa 4 zł
- 5, to grający wygrywa 10 zł
- 6, to grający wygrywa 70 zł.

a) oblicz wartość oczekiwaną zysku gracza

b) ile powinna wynosić wygrana za wyrzucenie trzech szóstek, żeby gra była sprawiedliwa?

(gra jest sprawiedliwa, jeżeli wartość oczekiwana zmiennej losowej opisującej zysk gracza jest równa zero).

Zadanie 5. (12 pkt)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny ABCS, w którym krawędź boczna ma długość równą b,

a miara kąta płaskiego ściany bocznej przy wierzchołku S ostrosłupa jest równa mierze kąta

dwuściennego między ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

- a) **Oblicz objętość ostrosłupa ABCS oraz promień kuli opisanej na tym ostrosłupie.**
- b) **Ostrosłup ABCS przecięto płaszczyzną otrzymując w przekroju kwadrat. Oblicz pole tego kwadratu.**