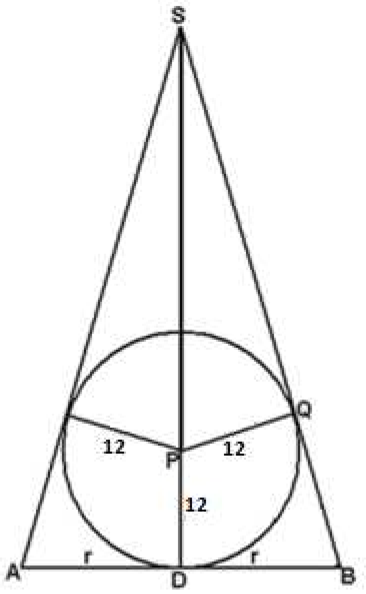
Zadania optymalizacyjne.
Krótki poradnik w formie przykładowego zadania.

Zadanie:
Na kuli o promieniu 12 cm opisano stożek. Jaka będzie wysokość stożka o najmniejszej objętości?



Oznaczmy przez x długość odcinka $\overline{PS}$

Należy obliczyć jaka musi być długość odcinka $\overline{DS}$, czyli $12+x$, aby objętość stożka: $V=\frac{\pi}{3}r^2\cdot(12+x)$ była najmniejsza.

Zapisz problem optymalizacyjny w taki właśnie sposób jak powyżej: pełnym tekstem bez żadnych skrótów, razem ze wzorem na objętość z oznaczeniami zgodnymi z wykonanym rysunkiem.

Teraz musisz zdawać sobie sprawę, że $V=V(r,x)$, czyli V jest funkcją dwóch zmiennych: każda zmiana r powoduje odpowiednią zmianę x.
Należy zatem znaleźć jakiekolwiek równanie łączące te dwie zmienne, aby po usunięciu jednej z nich otrzymać funkcję jednej zmiennej – przecież tylko dla takiej funkcji potrafimy obliczyć ekstremum.

$|BS|=\sqrt{r^2+(12+x)^2}$
Trójkąty PQS i DBS są podobne, gdyż mają takie same kąty.
Ilorazy długości odpowiednich boków tych trójkątów są równe:

$$\frac{|PQ|}{|DB|}=\frac{|PS|}{|BS|}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{12}{r}=\frac{x}{\sqrt{r^2+(12+x)^2}}$$

Przekształcamy otrzymane równanie:

$$rx=12\sqrt{r^2+(12+x)^2}\quad\Leftrightarrow\quad r^2x^2=144(r^2+(12+x)^2)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad r^2\cdot(x^2-144)=144\cdot(12+x)^2\quad\Leftrightarrow\quad r^2=\frac{144\cdot(12+x)^2}{x^2-144}$$

Musi być $x^2-144>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>12$, czyli $x\in(12,\infty)$ **- podczas wykonywania obliczeń cały czas pamiętaj, że jeżeli badasz funkcję, to twoim obowiązkiem jest wyznaczenie jej dziedziny.**

W tym przypadku po wyliczeniu r^2 i zastąpieniu go we wzorze na objętość, otrzymamy funkcję zmiennej x.

Wstawiamy r^2 do równania na objętość stożka:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{144 \cdot (12+x)^2}{x^2 - 144} \cdot (12+x) = \frac{144\pi}{3} \cdot \frac{(12+x)^3}{(x-12)(x+12)} = 48\pi \cdot \frac{(12+x)^2}{x-12}$$

$$V = 48\pi \cdot \frac{x^2 + 24x + 144}{x - 12}$$

Teraz zapisz problem optymalizacyjny językiem funkcji:

Należy teraz obliczyć, dla jakiej wartości $x \in (12, \infty)$ funkcja:

$$\boldsymbol{V(x) = 48\pi \cdot \frac{x^2 + 24x + 144}{x - 12}}$$

osiąga minimum.

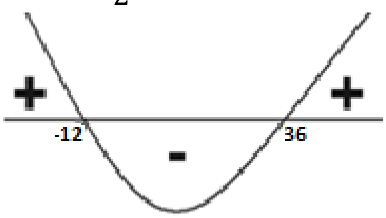
$$V'(x) = 48\pi \cdot \frac{(2x+24)(x-12) - (x^2+24x+144) \cdot 1}{(x-12)^2} =$$

$$= 48\pi \cdot \frac{2x^2 - 24x + 24x - 288 - x^2 - 24x - 144}{(x-12)^2} = 48\pi \cdot \frac{x^2 - 24x - 432}{(x-12)^2}$$

O znaku pochodnej decyduje znak wyrażenia $y = x^2 - 24x - 432$.

$\Delta = 576 + 1728 = 2304$, $\sqrt{\Delta} = 48$

$x_1 = \frac{24 - 48}{2} = -12$, $x_2 = \frac{24 + 48}{2} = 36$



Przy analizie znaku pochodnej pamiętaj, że dziedzina funkcji jest określona przynależnością $x \in (12, \infty)$. Tylko ten przedział cię interesuje…

Wniosek: funkcja $V(x)$ osiąga minimum dla $x = 36$.

Stożek ma najmniejszą objętość, gdy jego wysokość ma długość $12 + x = 12 + 36 = 48$.

Rozwiązanie zadania: 48 cm.