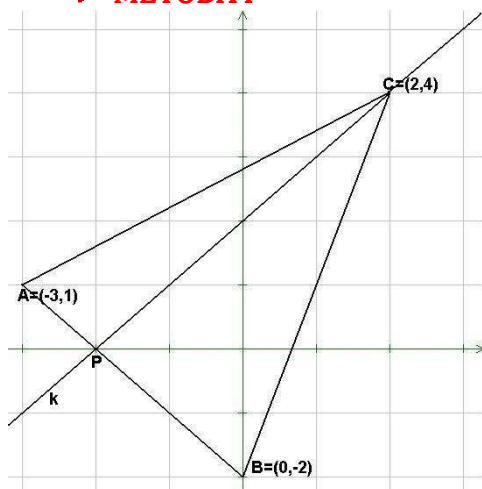


Jak liczyć pole trójkąta w układzie współrzędnych?

Najczęściej stosowane są cztery metody. Omówimy je na przykładzie.

➡ METODA I



Plan:

1. Liczymy $|AB|$
2. Wyznaczamy równanie prostej k , prostopadłej do prostej AB
3. Wyznaczamy współrzędne punktu P
4. Liczymy $|PC|$
5. Liczymy pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |PC|$

Obliczenia:

$$|AB| = \sqrt{(-3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Prosta AB (za pomocą równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$$y + 2 = \frac{1 + 2}{-3} \cdot x$$

$$y = -x - 2$$

Prosta k jest prostopadła do prostej AB , więc ma równanie: $y = x + b$

Punkt C należy do prostej k , czyli $4 = 2 + b \Leftrightarrow b = 2$

Ostatecznie prosta k ma równanie: $y = x + 2$

Liczymy współrzędne punktu P , który jest punktem przecięcia prostych AB i k :

$$\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad | +$$

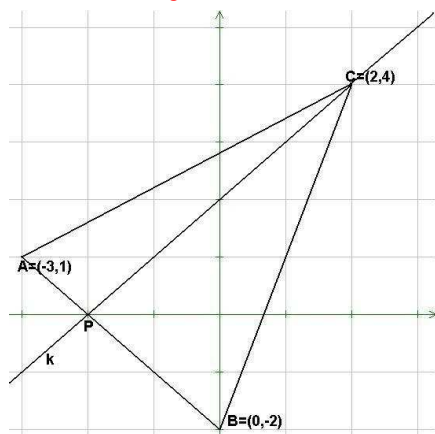
$y = 0$, $x = -2$, czyli $P = (-2, 0)$.

$$|PC| = \sqrt{(2 + 2)^2 + 4^2} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 12$$

➡ METODA II



Plan:

1. Liczymy $|AB|$
2. Wyznaczamy równanie prostej AB
3. Liczymy wysokość trójkąta $|PC|$, korzystając ze wzoru na odległość punktu (tu: C) od prostej (tu: AB)
4. Liczymy pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |PC|$

Obliczenia:

$$|AB| = \sqrt{(-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+2} = 3\sqrt{2}$$

Prosta AB (za pomocą równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$$y + 2 = \frac{1+2}{-3} \cdot x$$

$$y = -x - 2$$

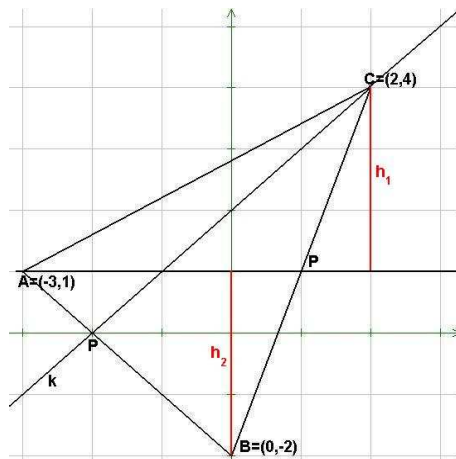
Równanie ogólne prostej AB: $x + y + 2 = 0$

$|PC|$ jest odległością punktu C od prostej AB:

$$|PC| = \frac{|2+4+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 12$$

➔ METODA III**Plan:**

1. Liczymy równanie prostej BC
2. Wyznaczamy współrzędne punktu P
3. Pole trójkąta liczymy jako sumę pól trójkątów APB i APC.

Obliczenia:

Prosta BC (za pomocą równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$$y + 2 = \frac{4+2}{2-0} \cdot x$$

$$y = 3x - 2$$

Dla $y = 1$ mamy: $1 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 1$

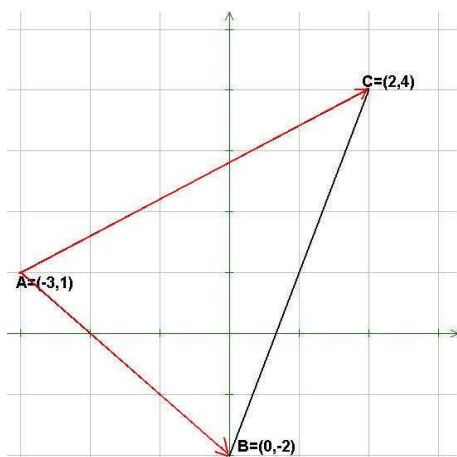
Współrzędne punktu P: $P = (1, 1)$

$$|AP| = 4, \quad h_1 = 3, \quad h_2 = 3$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 12$$

METODA IV



Plan:

Stosujemy wzór:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

gdzie $d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ jest wyznacznikiem pary wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = [a, b], \overrightarrow{AC} = [p, q]$$

$$d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = a \cdot q - b \cdot p$$

Obliczenia:

$$\overrightarrow{AB} = [0 + 3, -2 - 1] = [3, -3]$$

$$\overrightarrow{AC} = [2 + 3, 4 - 1] = [5, 3]$$

$$d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot (-3) = 24$$

Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \cdot |24| = 12$$

Która z tych metod jest najlepsza?

Ta, która prowadzi do celu jak najmniejszym kosztem (mało obliczeń).

Czytelnik może rozwiązać to zadanie dla mniej przyjaznych danych, np.

$$A = \left(-3, 4\frac{1}{2}\right), B = \left(-\frac{1}{4}, 12\right), C = \left(7\frac{1}{3}, 4\right).$$

Łatwo przekona się, że skuteczność podanych metod jest odwrotna do kolejności ich przedstawienia (choć metody II i III mają zbliżoną „pracochłonność”).

Najlepszą metodą jest metoda IV.

Często w praktyce nauki szkolnej nie wspomina się o wyznaczniku pary wektorów.

Czy wobec tego pisząc egzamin maturalny nie należałoby powstrzymać się przed użyciem tej metody?

Absolutnie nie! To, co znajduje się w szkolnych podręcznikach nie zawsze jest „kompatybilne” z tym, czego oczekuje od maturzysty CKE.

W tablicach matematycznych, które otrzymuje od komisji każdy maturzysta zdający egzamin maturalny z matematyki mamy na stronie 7 w dziale „Geometria analityczna” taki oto wzór:

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ dane jest wzorem: $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$

Cóż to za dziwny wzór? Czy jest on powszechnie podawany w szkole? Nie jest.

Jest to wzór na pole trójkąta z użyciem wyznacznika pary wektorów, jednak bez formalnego powołania się na fakt, że wyrażenie pod wartością bezwzględną jest wyznacznikiem pary wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

W rozwiązaniach wszystkich zadań, w których trzeba obliczyć pole trójkąta w układzie współrzędnych, i które są dostępne na stronie www.maturzysta.info, stosujemy metodę IV. Wzór na pole trójkąta został podany z użyciem pojęcia wyznacznika pary wektorów, gdyż w tej postaci o wiele łatwiej go zapamiętać.