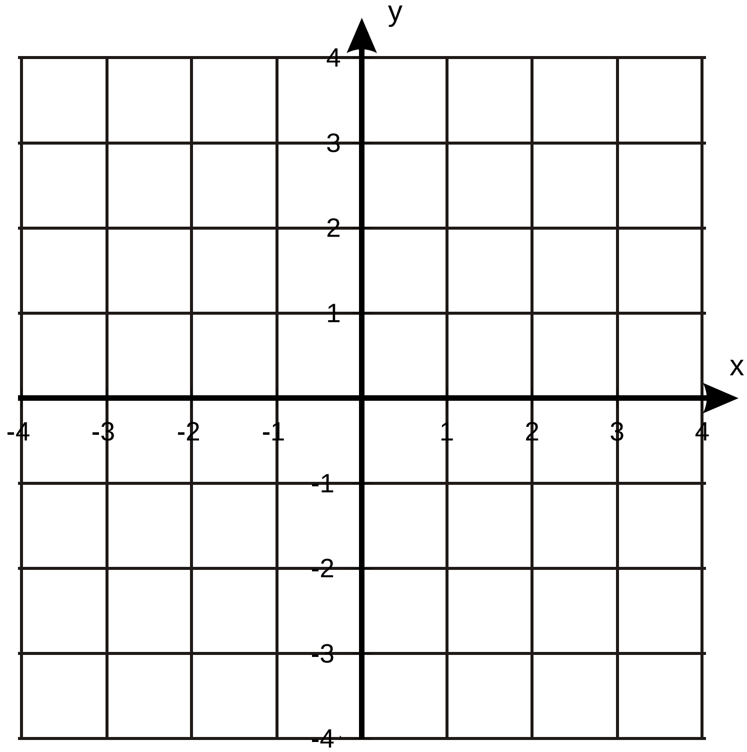
Przykładowe zadania dla poziomu rozszerzonego

Zadanie 1. (*4 pkt*)
W banku w pierwszym roku oszczędzania stopa procentowa była równa p%, a w drugim roku była o 2% niższa. Po dwóch latach, przy rocznej kapitalizacji odsetek, stan konta wzrósł z 1000 zł do 1232 zł. Oblicz p.

Zadanie 2. (*6 pkt*)
Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań równania $\log_x y = \log_y x$.



Zadanie 3. (*4 pkt*)
Środek masy układu dwóch punktów materialnych A, B o masach równych odpowiednio m_1, m_2 to taki punkt S, że $m_1\overrightarrow{SA} + m_2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$. Korzystając z powyższej definicji wyznacz współrzędne środka masy układu dwóch punktów materialnych $A(-3,4)$, $B(7,-1)$ o masach odpowiednio równych 3 i 2.

Zadanie 4. (*5 pkt*)
Wyraz pierwszy i iloraz ciągu geometrycznego (a_n) są odpowiednio równe 1 i $k^2 - 4$. Zbadaj, dla jakich wartości parametru k ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = \log^2 a_{n+1} - \log^2 a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 5. (*5 pkt*)
W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 36, zaś suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 12. Wyznacz ten ciąg.

Zadanie 6. (*7 pkt*)
Boki trójkąta zawarte są w prostych o równaniach: $y - 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 7. (*5 pkt*)

Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $4x^2-8x+k^2-21=0$. Naszkicuj wykres funkcji $k \mapsto (x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-1}$.

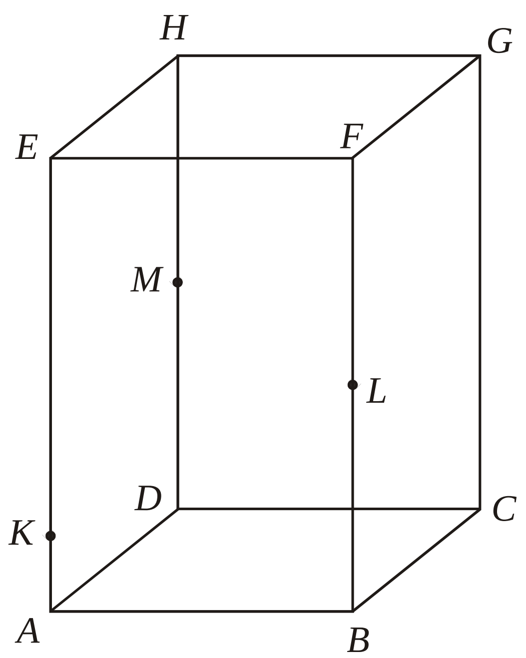
Zadanie 8. (*6 pkt* **)**

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=x^4+x^3-7x+7$. Uzasadnij, że funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie, postępując według podanej instrukcji:

- oblicz pochodną funkcji f;
- wyznacz miejsce zerowe pochodnej funkcji f;
- zbadaj znak pochodnej funkcji f;
- wyznacz ekstremum funkcji f i określ jego rodzaj;
- wyznacz najmniejszą wartość funkcji f;
- sformułuj odpowiedź.

Zadanie 9. (*4 pkt*)

Prostopadłościan *ABCDEFGH* ma wysokość równą 10, a jego podstawa jest kwadratem o boku długości 4. Oblicz pole przekroju tego prostopadłościanu płaszczyzną *KLM* wiedząc, że $|AK|=1$, $|BL|=|DM|=3$.



Zadanie 10. (*6 pkt*)

Udowodnij, że funkcja f określona wzorem $f(x)=x\log_2\frac{1-x}{1+x}$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 11. (*4 pkt*)

W pewnej miejscowości we wrześniu było 80% dni pogodnych i 20% dni deszczowych.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że spośród trzech losowo wybranych dni września wszystkie dni były deszczowe.

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że spośród trzech losowo wybranych dni września przynajmniej jeden był dniem pogodnym.

Zadanie 12. (*5 pkt*)
Znajdź równanie stycznej do krzywej o równaniu $y = x^3$ w punkcie o współrzędnych $(1,1)$.
Wyznacz współrzędne punktów wspólnych tej stycznej z daną krzywą.

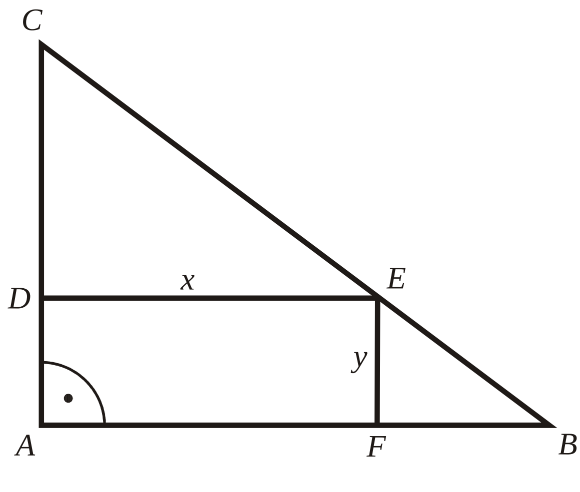
Zadanie 13. (*4 pkt*)
Przeczytaj twierdzenia.
Twierdzenie 1. Jeżeli dane są trzy ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$, $n \in N \setminus \{0\}$ takie, że $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = g$ oraz istnieje takie n_0, że dla wszystkich $n > n_0$ spełniona jest nierówność $a_n \le c_n \le b_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$.
Twierdzenie 2. Dla każdego $a > 0$ granica ciągu $(\sqrt[n]{a})$, $n \in N \setminus \{0\}$, jest równa 1.
Korzystając z podanych twierdzeń możemy obliczyć $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n}$ w następujący sposób:

$$7^n < 5^n + 6^n + 7^n < 3 \cdot 7^n$$

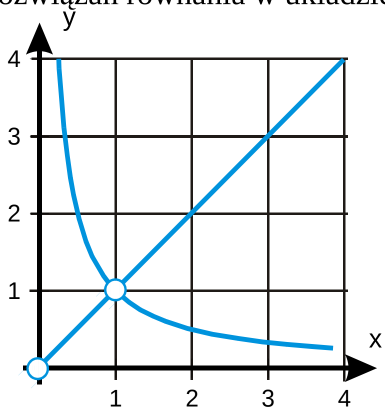
$$7 < \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n} < 7 \cdot \sqrt[n]{3}$$

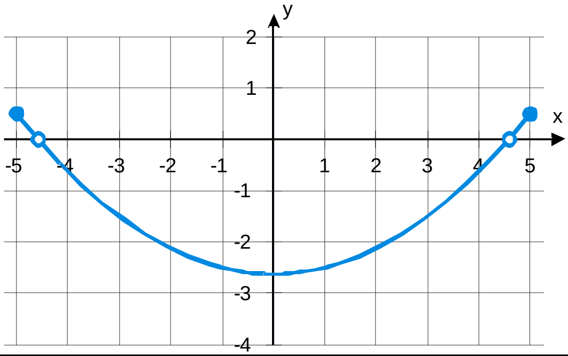
Na podstawie twierdzenia 2. granica $\lim\limits_{n\to+\infty} 7 \cdot \sqrt[n]{3}$ jest równa 7. Wykorzystując twierdzenie 1. otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n} = 7$.
Postępując w opisany wyżej sposób, oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + 10^n + 5^n + 6^n}$.

Zadanie 14. (*6 pkt***)**
W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|AB| = 4$ wpisany został prostokąt $AFDE$ w taki sposób, że dwa boki prostokąta zawarte są w przyprostokątnych trójkąta, a wierzchołek E leży na przeciwprostokątnej trójkąta (patrz rysunek). Udowodnij, że największe pole, jakie może mieć taki prostokąt, jest równe 3.



Schematy punktowania zadań

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	Zapisanie równania: np. $1000(1+\frac{p}{100})(1+\frac{p-2}{100})=1232$	1
	Zapisanie równania w postaci: $p^2+198p-2520=0$	1
	Obliczenie pierwiastków równania: $p=12$, $p=-210$	1
	Sformułowanie odpowiedzi: $p=12\%$	1
2	Zapisanie warunków określających dziedzinę równania: $x>0 \wedge x\neq 1 \wedge y>0 \wedge y\neq 1$	1
	Zapisanie równania np. w postaci: $\frac{\log y}{\log x}=\frac{\log x}{\log y}$	1
	Zapisanie równania w postaci alternatywy równań: $\log y=\log x$ lub $\log y=-\log x$	1
	Zapisanie alternatywy równań: $y=x$ lub $y=\frac{1}{x}$	1
	Zaznaczenie zbioru rozwiązań równania w układzie współrzędnych.  Jeśli nie zostały zaznaczone punkty o współrzędnych $(0,0)$ i $(1,1)$, to przyznajemy 1 punkt.	2
3	Zapisanie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{SA}$ i $\overrightarrow{SB}$: $\overrightarrow{SA}=[-3-x_S, 4-y_S]$ i $\overrightarrow{SB}=[7-x_S, -1-y_S]$, gdzie $S(x_S, y_S)$ jest środkiem masy układu dwóch punktów materialnych.	1
	Wykorzystanie definicji środka masy i zapisanie odpowiedniego równania: $3\cdot[-3-x_S, 4-y_S]+2\cdot[7-x_S, -1-y_S]=[0,0]$	1
	Zapisanie ostatniego równania w postaci: $[5-5x_S, 10-5y_S]=[0,0]$	1
	Wyznaczenie współrzędnych środka masy układu punktów: $S(1,2)$	1
4	Zapisanie wzoru na wyraz ogólny ciągu (a_n): $a_n=(k^2-4)^{n-1}$	1
	Zapisanie wzoru na wyraz ogólny ciągu (b_n): $b_n=(2n-1)\log^2(k^2-4)$	1
	Wyznaczenie tych wartości parametru *k*, dla których istnieją wyrazy ciągu (b_n): $k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$	1
	Wyznaczenie różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu (b_n): $b_{n+1}-b_n=2\log^2(k^2-4)$	1
	Sformułowanie odpowiedzi: ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym dla $k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$	1

5	Zapisanie sumy wyrazów ciągu o numerach nieparzystych: $\frac{a_1}{1-q^2}=36$	1
	Zapisanie sumy wyrazów ciągu o numerach parzystych: $\frac{a_1 q}{1-q^2}=12$	1
	Wyznaczenie ilorazu ciągu: $\frac{1}{3}$	1
	Sprawdzenie warunku zbieżności szeregu geometrycznego: $\left\lvert\frac{1}{3}\right\rvert=\frac{1}{3}<1$.	1
	Wyznaczenie pierwszego wyrazu ciągu: 32	1
6	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trójkąta: $(0,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(8,\ 6)$	1
	Wyznaczenie równania symetralnej boku trójkąta równoległego do osi *Ox*: $x=2$	1
	Wyznaczenie równania symetralnej boku trójkąta nierównoległego do osi *Ox*: np. $y=-x+10$ (Za wyznaczenie współrzędnych środka odpowiedniego boku lub współczynnika kierunkowego symetralnej przyznajemy 1 punkt)	2
	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na trójkącie: $(2,8)$	1
	Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie: $2\sqrt{10}$	1
	Zapisanie równia okręgu opisanego na trójkącie: $(x-2)^2+(y-8)^2=40$	1
7	Wyznaczenie wartości *k*, dla których istnieją pierwiastki równania $4x^2-8x+k^2-21=0$: $k\in\langle -5,\ 5\rangle$	1
	Podanie dziedziny funkcji $k\mapsto(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-1}$: $k\in\langle -5,\ 5\rangle\setminus\{-\sqrt{21},\ \sqrt{21}\}$	1
	Zapisanie wzoru funkcji: $k\mapsto\frac{1}{8}k^2-\frac{21}{8}$	1
	Naszkicowanie wykresu funkcji $k\mapsto(x_1^{-1}+x_2^{-1})^{-1}$ i zaznaczenie na wykresie punktów nie należących do wykresu 	2
8	Obliczenie pochodnej funkcji *f*: $f'(x)=4x^3+3x^2-7$, $x\in R$	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji *f*: 1	1
	Zbadanie znaku pochodnej funkcji *f*: $f'(x)>0$ dla $x\in(1,+\infty)$; $f'(x)<0$ dla $x\in(-\infty,1)$	1
	Wyznaczenie ekstremum funkcji *f* i określenie jego rodzaju: funkcja *f* osiąga w punkcie 1 minimum równe 2	1
	Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji *f*: 2	1
	Sformułowanie odpowiedzi: np. najmniejsza wartość funkcji *f* jest równa 2, więc wszystkie wartości funkcji *f* są dodatnie	1

9	Obliczenie długości odcinka *ML*: $4\sqrt{2}$	1
	Obliczenie długości odcinka *KL*: $2\sqrt{5}$	1
	Obliczenie długości przekątnej rombu, którego trzema wierzchołkami są punkty *K*, *L* i *M*, wychodzącej z punktu *K*: $4\sqrt{3}$	1
	Obliczenie pola przekroju: $8\sqrt{6}$	1
10	Podanie dziedziny funkcji *f*: $D=(-1,1)$	1
	Zapisanie, że dziedzina funkcji *f* jest zbiorem symetrycznym względem 0 lub zapisanie warunku: $x\in D \Rightarrow -x\in D$	1
	Zapisanie wartości funkcji *f* dla argumentu $-x$: $f(-x)=-x\log_2\frac{1+x}{1-x}$	1
	Wykorzystanie własności logarytmów: $f(-x)=x\log_2\frac{1-x}{1+x}$	1
	Zapisanie warunku $f(-x)=f(x)$ dla $x\in(-1,1)$	1
	Sformułowanie odpowiedzi: funkcja *f* jest funkcją parzystą	1
11	Obliczenie liczby dni deszczowych i liczby dni pogodnych: 6 i 24	1
	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: np. 4060 lub narysowanie drzewa z zaznaczeniem na gałęziach odpowiednich prawdopodobieństw	1
	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających oraz obliczenie prawdopodobieństwa, że spośród trzech losowo wybranych dni września wszystkie dni były deszczowe: 20; $\frac{1}{203}$ lub obliczenie odpowiedniego prawdopodobieństwa z drzewa	1
	Obliczenie prawdopodobieństwa, że spośród trzech losowo wybranych dni września przynajmniej jeden był dniem pogodnym: $\frac{202}{203}$	1
12	Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: 3	1
	Zapisanie równania stycznej: $y=3x-2$	1
	Zapisanie odpowiedniego układu równań: $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=x^3 \end{cases}$ (Punkt przyznajemy także za zapisanie równania: $3x-2=x^3$)	1
	Rozwiązanie odpowiedniego równania: $x=1$ lub $x=-2$	1
	Podanie współrzędnych punktów wspólnych: $(1,1)$, $(-2,-8)$	1
13	Zapisanie nierówności: $10^n<3^n+10^n+5^n+6^n<4\cdot 10^n$	1
	Zapisanie nierówności: $10<\sqrt[n]{3^n+10^n+5^n+6^n}<\sqrt[n]{4}\cdot 10$	1
	Obliczenie granic: $\lim\limits_{n\to+\infty}10=10$, $\lim\limits_{n\to+\infty}10\cdot\sqrt[n]{4}=10$	1
	Obliczenie granicy: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+10^n+5^n+6^n}=10$	1
14	Wykorzystanie podobieństwa np. trójkątów *ABC* i *EFB*: $\frac{\lvert EF\rvert}{\lvert AC\rvert}=\frac{\lvert FB\rvert}{\lvert AB\rvert}$	1
	Wyznaczenie zależności między długościami boków prostokąta: np. $y=3-\frac{3}{4}x$	1
	Zapisanie pola prostokąta w zależności od długości jednego z jego boków: np. $P(x)=3x-\frac{3}{4}x^2$	1
	Wyznaczenie dziedziny funkcji *P*: $x\in(0,4)$	1

	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli o równaniu $y=3x-\frac{3}{4}x^2$: $(2,3)$	1
	Sformułowanie odpowiedzi: np. ramiona paraboli o równaniu $y=3x-\frac{3}{4}x^2$ są skierowane do dołu, więc dla argumentu 2 funkcja P osiąga największą wartość równą 3	1

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą (zgodną z poleceniem) od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.