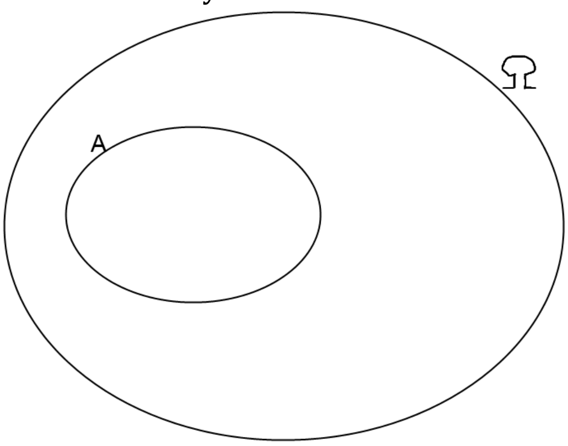
Prawdopodobieństwo warunkowe – spojrzenie z innej strony

W wielu przypadkach, informacja o zajściu zdarzenia B ma pewien wpływ na wartość obliczanego prawdopodobieństwa zdarzenia A. Zdarzenie polegające na zajściu zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B oznaczamy symbolem A/B, a prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A/B)$ nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym.

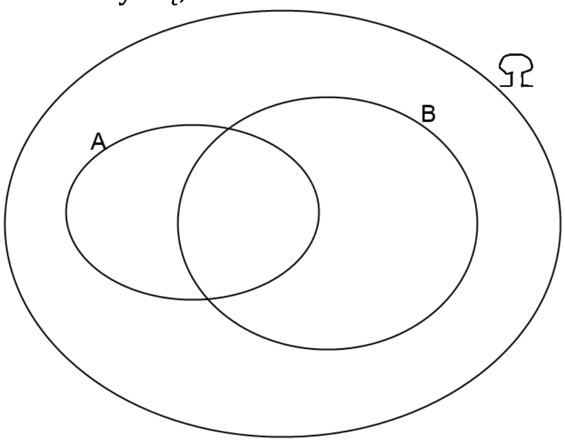
Prawdopodobieństwo **zdarzenia *A* przy warunku, że zaszło zdarzenie *B*** liczymy według wzoru:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$

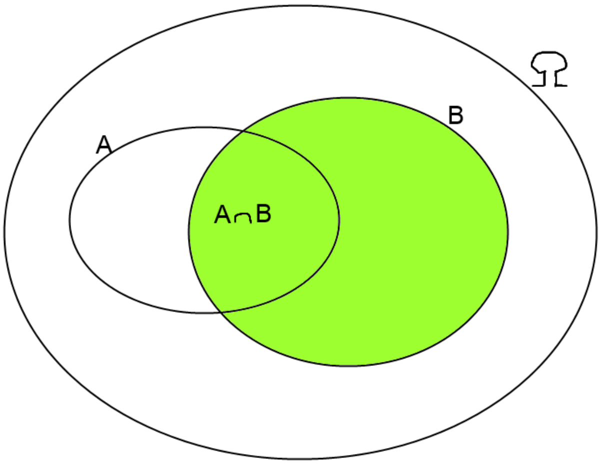
Istotę tego wzoru zilustrujemy graficznie (nie jest to interpretacja ścisła w matematycznym sensie, ale dobrze oddaje istotę pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego).
Prawdopodobieństwo zdarzenia A można sobie wyobrażać jako iloraz „pola" zdarzenia A do „pola" zbioru zdarzeń elementarnych Ω:



Załóżmy teraz, że dowiedzieliśmy się, że zaszło zdarzenie B:



W tym momencie cały zbiór Ω przestał nas interesować, bo przecież wiemy, że **zaszło zielone**:



Interesuje nas tylko „zielone" - dlatego teraz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A przy warunku, że zaszło zdarzenie B jest równe ilorazowi „pola" zdarzenia $A \cap B$ przez „pole" zdarzenia B.

Przykład 1.
Doświadczenie: rzut kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek pod warunkiem, że wypadło mniej niż 6 oczek.

Oznaczmy zdarzenia:
A - wyrzucono parzystą liczbę oczek
B - wypadło mniej, niż 6 oczek

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathrm{A} = \{2, 4, 6\}$, $\mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2, 4\}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}\ ,\ \ P(B) = \frac{5}{6}\ ,\ \ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

Przykład 2.
Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano damę jeżeli wiadomo, że wylosowana karta nie jest ani kierem ani królem?

Oznaczmy zdarzenia:
A – wylosowano damę
B - wylosowana karta nie jest ani kierem ani królem

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\overline{\overline{\Omega}} = 52$

Zdarzenie $A \cap B$: wylosowano damę, które nie jest kierem, a zatem jest to dama pik lub karo lub trefl. Zatem:

$\overline{\overline{A \cap B}} = 3, \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{52}$

Zdarzenie B: wylosowana karta nie jest ani kierem ani królem (z 52 kart odrzucamy 13 kierów (w tym król) i pozostałe trzy króle) – zatem:

$$\overline{\overline{B}} = 52 - 13 - 3 = 36, \qquad P(B) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

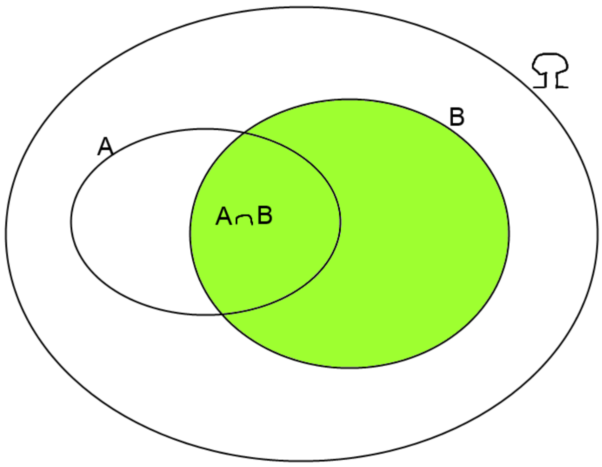
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{9}{13}} = \frac{3}{52} \cdot \frac{13}{9} = \frac{1}{12}$$

A teraz popatrzmy na to z innej strony. Zazwyczaj liczymy tak:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}{\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \cdot \frac{\overline{\overline{\Omega}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$$

Jak widać skraca się $\overline{\overline{\Omega}}$, czyli tak naprawdę niepotrzebnie jest liczone!

Wróćmy do poprzednich zapisów, które wobec tego trochę zmienimy:



Interesuje nas tylko „zielone” - dlatego teraz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A przy warunku, że zaszło zdarzenie B jest równe ilorazowi ~~„pola”~~ **liczebności** zdarzenia $A \cap B$ przez ~~„pole”~~ **liczebność** zdarzenia B.

Wykorzystując powyższe uwagi rozwiążemy zadania z podanych wcześniej przykładów „omijając” wzór na prawdopodobieństwo warunkowe – po prostu podzielimy liczebności odpowiednich zdarzeń.

Przykład 1.
Doświadczenie: rzut kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek pod warunkiem, że wypadło mniej niż 6 oczek.

Skoro wypadło mniej niż 6 oczek, to mamy 5 możliwości: $\{1,2,3,4,5\}$.
W tym mamy dwie liczby parzyste: $\{2,4\}$.
Szukane prawdopodobieństwo: $\mathbf{\frac{2}{5}}$

Przykład 2.
Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano damę jeżeli wiadomo, że wylosowana karta nie jest ani kierem ani królem?

Skoro wiadomo, że wylosowana karta nie jest ani kierem ani królem, to jest to: dowolna karta z kolorów: trefl, karo i pik (39 kart) za wyjątkiem trzech króli w tych kolorach, zatem takich kart jest $39 - 3 = 36$.
W tych 36-u kartach są trzy damy: D♣, D♦, D♠.

Szukane prawdopodobieństwo: $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Powyższe przykłady ilustrują, że proste zadania „ustawione” na wykorzystanie wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe łatwo jest przechytrzyć i obliczyć żądane prawdopodobieństwo znacznie szybciej.