Przykładowy arkusz maturalny

Arkusz I poziom podstawowy

1. **(3 pkt) Gracz rzuca dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry i oblicza sumę wyrzuconych oczek. Jeśli suma ta jest jedną z liczb: 6, 7 lub 8, to gracz wygrywa. W pozostałych przypadkach przegrywa.**
   a) **Uzupełnij tabelę tak, aby przestawiała wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego.**

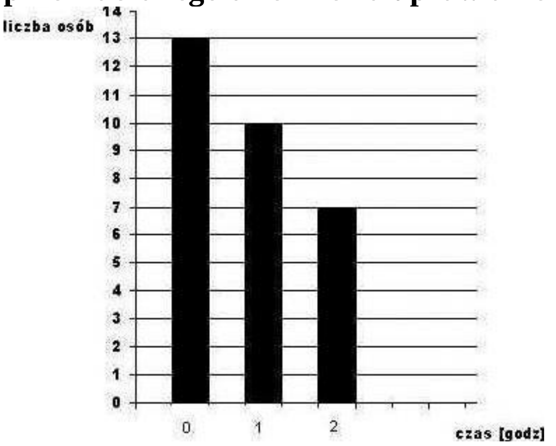
II rzut \ I rzut	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4				
3	4	5				
4	5					
5						
6						

   b) **Podaj liczbę wyników sprzyjających wygranej gracza i oblicz prawdopodobieństwo wygranej.**
2. **(3 pkt) Średnia miesięczna płaca netto w pewnym zakładzie zatrudniającym 30 pracowników wynosiła 2500 zł. Po zatrudnieniu nowego, wysoko wykwalifikowanego pracownika, średnia miesięczna płaca netto wzrosła o 0,4%. Oblicz płacę netto nowego pracownika.**
3. **(5 pkt) Prawdą jest, że: „Jeżeli w czterocyfrowej liczbie naturalnej suma cyfr tysięcy i dziesiątek jest równa sumie cyfr setek i jedności, to liczba ta jest podzielna przez 11”. Ponieważ $4+6=8+2$, to 4862 jest podzielna przez 11.**
   a) **Wykorzystując podaną cechę podzielności sprawdź, czy liczba 5764 jest podzielna przez 11.**
   b) **Podaj, jaką cyfrą powinno się zastąpić □, aby liczba 95□8 była podzielna przez 11.**
   c) **Uzasadnij twierdzenie, że czterocyfrowa liczba, której trzy cyfry są jednakowe, a czwarta inna, nie jest podzielna przez 11.**
4. **(4 pkt) Dane są liczby: $m=\dfrac{\binom{5}{3}}{\frac{5}{3}}$ i $n=\dfrac{2^{-2}\cdot(0,5)^{-6}}{64^{\frac{1}{6}}}$.**
   a) **Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy liczby m i n są całkowite.**
   b) **Wyznacz liczbę k tak, by liczby m, n, k były odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.**
5. **(4 pkt) Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha=-2$ i $\alpha\in(0,\pi)$ oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.**
6. **(5 pkt) Wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) spełniające równanie $xy-4y=7$ można wyznaczyć stosując następującą metodę:**
   - **zapisać lewą stronę w postaci iloczynu $(x-4)\cdot y=7$,**
   - **stwierdzić, że zarówno $x-4$ jak i y muszą być liczbami naturalnymi,**
   - **zauważyć, że liczbę 7 daje się przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych tylko na jeden sposób, a korzystając z przemienności mnożenia mamy dwie możliwości: $7\cdot1$ lub $1\cdot7$,**

- rozpatrzyć dwa przypadki: $\begin{cases} x-4=1 \\ y=7 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x-4=7 \\ y=1 \end{cases}$,
- wyznaczyć wszystkie pary liczb, spełniających te warunki:
  $\begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases}$

Stosując przedstawioną wyżej metodę wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) spełniające równanie $xy-y=4$.

7. **(4 pkt) Na poniższym diagramie zestawiono wyniki ankiety dotyczącej czasu przeznaczanego dziennie na uprawianie sportu:**



   a) **Oblicz średnią liczbę godzin przeznaczoną dziennie na uprawianie sportu w badanej grupie.**
   b) **Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczanego dziennie na uprawianie sportu. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.**

8. **(4 pkt) Funkcja f określona na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, przyporządkowuje każdej liczbie n resztę z dzielenia tej liczby przez 4.**
   a) **Określ zbiór wartości funkcji f.**
   b) **Podaj zbiór wszystkich miejsc zerowych funkcji f.**
   c) **Narysuj wykres funkcji f dla $n \le 10$.**

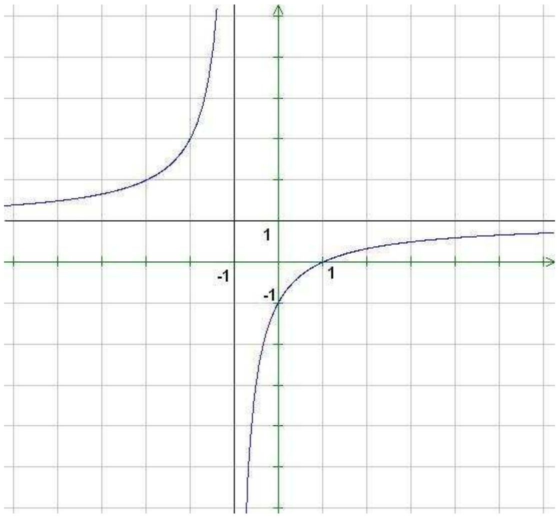
9. **(6 pkt) Maszyna wycina z krążków kwadraty w ten sposób, że wykorzystuje materiał maksymalnie. Gdyby promień danego krążka zwiększono o 1, to pole wyciętego kwadratu zwiększyłoby się czterokrotnie. Oblicz pole danego krążka.**

10. **(7 pkt) Funkcja f określona jest wzorem: $f(x)=2x^2-7x+c$ dla $x \in R$.**
    a) **Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c, dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe.**
    b) **Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c, dla których miejscami zerowymi funkcji są liczby 1 i $2\frac{1}{2}$.**
    c) **Wyznacz wszystkie wartości współczynnika c tak, aby wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f należał do prostej o równaniu $y=x$.**

11. **(5 pkt) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, trójkątnego długości krawędzi podstawy 6 cm, jest równa $9\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim szukany kąt. Zapisz obliczenia.**

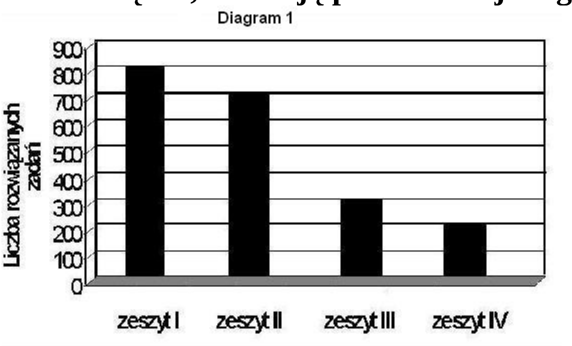
Arkusz II poziom rozszerzony

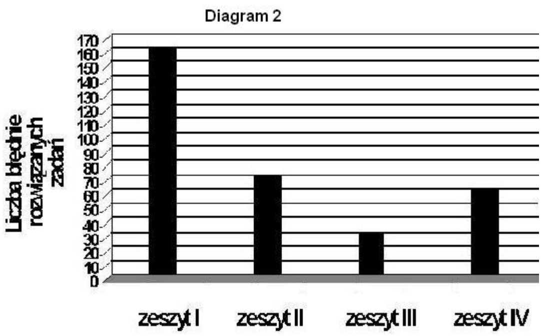
12. (2 pkt)



Powyższy rysunek przedstawia wykres funkcji f należącej do rodziny funkcji $F(x)=\frac{ax-1}{bx+c}$. Wyznacz wartości a, b, c.

13. (4 pkt) Czterech uczniów I, II, III, IV, przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki, podzieliło się rozwiązywaniem 2000 zadań. Każdy z uczniów przygotował oddzielny zeszyt z rozwiązaniami zadań. Liczby rozwiązanych zadań w zeszytach uczniów I, II, III, IV, oraz dane dotyczące liczby błędnych rozwiązań, ilustrują podane niżej diagramy 1 i 2:

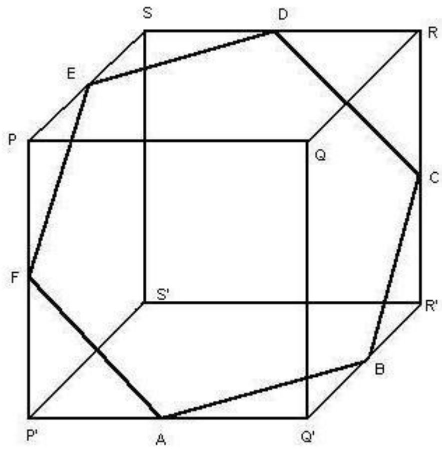




Nauczyciel zamierza wylosować jeden zeszyt z rozwiązaniami, a następnie z tego zeszytu sprawdzić rozwiązanie losowo wybranego zadania.
Oblicz prawdopodobieństwo, że w wybranym zadaniu nie będzie błędu.

14. (5 pkt) Wykaż, że dla wszystkich $a\in(0,1)$ i dla wszystkich $b\in(0,\infty)$ jest spełniona nierówność: $\log_a b+\log_b a\le -2$.

15. (4 pkt) PQRSP'Q'R'S' pewną płaszczyzną (patrz rysunek poniżej) jest sześciokątem ABCDEF, którego wierzchołki są środkami odpowiednich krawędzi sześcianu. Odwołując się do definicji wielokąta foremnego, uzasadnij, że sześciokąt ABCDEF jest sześciokątem foremnym.

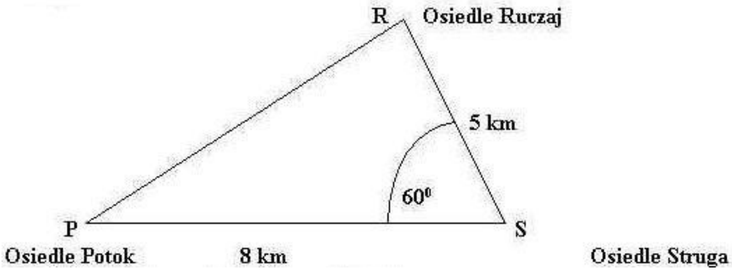


16. (7 pkt) Producent zamierza rozlewać sok do pudełek w kształcie prostopadłościanu o pojemności 1,8 litra. Dobierz wymiary pudełka tak, aby na jego wyprodukowanie zużyć jak najmniej materiału, przyjmując, że stosunek długości sąsiednich krawędzi podstawy jest równy 2:3 (wykonując obliczenia zaniedbaj ilość materiału potrzebnego do sklejenia, złożenia itp.).
17. (5 pkt) Udowodnij twierdzenie: „Jeżeli w czterocyfrowej liczbie naturalnej suma cyfr tysięcy i dziesiątek jest równa sumie cyfr setek i jedności, to liczba ta jest podzielna przez 11”.
18. (5 pkt) Dane są figury f_1 i f_2 określone warunkami:

$$f_1 = \{(x,y): x \in R, y \in R \ \wedge \ x^2 - 4x + y^2 \le 0\}$$

$$f_2 = \{(x,y): x \in R, y \in R \ \wedge \ y - |x-2| \ge 0\}$$

    a) W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie narysuj figury f_1 i f_2, oraz zaznacz figurę $f = f_1 \cap f_2$.
    b) Oblicz pole figury f.
19. Na załączonym schemacie wierzchołki trójkąta PRS wyznaczają położenie osiedli mieszkaniowych Potok, Ruczaj i Struga.



    a) Oblicz odległość pomiędzy osiedlami Ruczaj i Potok.
    b) Postanowiono wybudować centrum telekomunikacyjne w miejscu, znajdującym się w takiej samej odległości od każdego z osiedli. Oblicz odległość centrum telekomunikacyjnego od osiedla Struga.
20. (9 pkt) W stożek, w którym kąt między tworzącą a podstawą ma miarę 2α, wpisano kulę.
    a) Oblicz stosunek objętości stożka do objętości kuli.
    b) Wyznacz $\cos\alpha$, jeżeli stosunek objętości stożka do objętości kuli jest równy 9:4.
21. (4 pkt) Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których granica ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{3 + k \cdot n}{6 + k^2 \cdot n}$ jest liczba $\dfrac{1}{2}$.