Przykładowy arkusz z rozwiązaniami

Arkusz I – poziom podstawowy

1. **(4 pkt) Rozwiąż nierówność: $x^3 + 2x^2 \geq 4x + 8$, a następnie wskaż najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność (o ile taka liczba istnieje).**

Rozwiązanie:

$$x^3 + 2x^2 \geq 4x + 8 \iff x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0 \iff x^2(x+2) - 4(x+2) \geq 0 \iff$$

$$\iff (x+2)(x^2 - 4) \geq 0 \iff (x+2)(x+2)(x-2) \geq 0 \iff (x+2)^2(x-2) \geq 0$$

Nierówność jest spełniona dla $x = -2$. Jeżeli $x \neq -2$, to wyrażenie $(x+2)^2$ jest liczbą dodatnią, więc musi być: $x - 2 \geq 0$, stąd $x \geq 2$.

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności jest $x \in \{-2\} \cup \langle 2, \infty)$.

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest -2.

2. **(3 pkt) Cenę komputera podniesiono najpierw o 10%, a po pewnym czasie jeszcze o 20%. O ile procent należałoby jednorazowo podnieść cenę komputera, aby uzyskać taką samą cenę jak po obu podwyżkach?**

Rozwiązanie:

Oznaczmy: x – początkowa cena komputera. Mamy:

$110\%\ x = 1{,}1x$ - cena komputera po pierwszej podwyżce

120% z $1{,}1x = 1{,}2 \cdot 1{,}1x = 1{,}32x$ - cena komputera po drugiej podwyżce

Stąd wynika, że cena końcowa, to $1{,}32 = 132\%$ ceny początkowej.

Aby uzyskać taki sam efekt za pomocą jednej podwyżki, należałoby podnieść cenę komputera o 32%.

3. **(4 pkt) Numer ewidencyjny PESEL składa się z 11 cyfr. Sześć pierwszych cyfr oznacza datę urodzenia osoby (np. cyframi 730328 rozpoczyna się numer PESEL osoby urodzonej 28 marca 1973 roku). Pozostałe cyfry są dowolne i mogą się powtarzać. Ile może być wszystkich numerów PESEL:**
   a) **przyporządkowanych osobom urodzonym w marcu 1973 roku?**
   b) **przyporządkowanych osobom urodzonym 28 marca 1973 roku, takich, że trzy ostatnie cyfry numeru są różnymi liczbami pierwszymi, a cyfry siódma i ósma są liczbami nieparzystymi?**

Rozwiązanie:

a) Osoby urodzone w marcu 1973 roku mają następujący numer PESEL: 7303ddxxxxx , gdzie :
   dd = dzień urodzenia - liczba ze zbioru {1,2,3,...,31}, gdyż marzec ma 31 dni
   xxxxx = dowolny ciąg pięciu cyfr - ten ciąg może być utworzony na 10^5 sposobów, gdyż tyle jest wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami utworzonych z elementów 10-elementowego zbioru cyfr.
   Ostatecznie: ilość numerów PESEL dla takich osób jest iloczynem liczb 31 i 10^5, czyli 3 100 000

b) Szukane numery PESEL muszą mieć następującą postać: 730328nnppp, gdzie:
   nn -dwuwyrazowy ciąg utworzony z (niekoniecznie różnych) cyfr nieparzystych. Zbiór cyfr nieparzystych: {1,3,5,7,9} jest 5-elementowy, więc takich ciągów jest $5^2 = 25$.
   ppp - dwuwyrazowy ciąg utworzony z różnych liczb pierwszych.

Zbiór tych cyfr, które są liczbami pierwszymi: {2,3,5,7} jest czteroelementowy, więc takich ciągów jest tyle, ile trzywyrazowych wariacji bez powtórzeń utworzonych z elementów 4-elementowego zbioru, tzn. 24.
Ostatecznie liczba poszukiwanych numerów PESEL jest iloczynem liczb 25 i 24, czyli wynosi ona 600.

4. **Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{\sqrt[3]{7}}{2-\sqrt[3]{7}}$, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, mnożąc licznik i mianownik ułamka przez niepełny kwadrat sumy liczb: 2 i $\sqrt[3]{7}$:**

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{2-\sqrt[3]{7}}=\frac{\sqrt[3]{7}\cdot(4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49})}{(2-\sqrt[3]{7})\cdot(4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49})}=\frac{4\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{49}+7}{2^3-(\sqrt[3]{7})^3}=4\sqrt[3]{7}+2\sqrt[3]{49}+7$$

Posługując się tą metodą, oblicz wartość sumy:

$$\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}+\frac{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2}-1)}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}-1)}=$$

$$=\frac{3\cdot(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{2})^3+1}+\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^3-1}=\frac{3\cdot(2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}{3}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}=$$

$$=2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}=2$$

5. **(4 pkt) W roku 1845 na uroczystości urodzin spytał ktoś jubilata, ile on ma lat. Jubilat odpowiedział: „Gdy swój wiek sprzed 15 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swego urodzenia". Ile lat miał wówczas jubilat?**

Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy wiek jubilata w chwili, gdy wypowiada te słowa, to otrzymamy: $(x-15)(x+15)=R$, gdzie R jest jego rokiem urodzenia, oraz $x>15$ i $x\in N$.

Rok urodzenia jubilata jest równy: $R=1845-x$.

Mamy:

$$(x-15)(x+15)=1845-x$$

$$x^2-225=1845-x$$

$$x^2+x-2070=0$$

$$\Delta=1+8280=8281,\ \sqrt{\Delta}=91$$

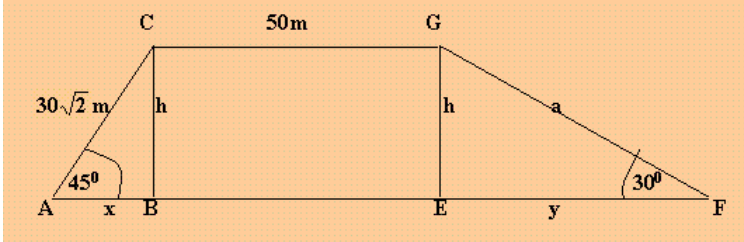
$$x_1=\frac{-1-91}{2}=-46\ \text{ – odrzucamy, bo } n\in N$$

$$x_2=\frac{-1+91}{2}=45$$

Jubilat miał 45 lat.

6. (5 pkt) **Działka państwa Jabłońskich ma kształt trapezu, w którym kąty przy dłuższej podstawie mają miary 30^0 i 45^0, krótsze ramię ma długość $30\sqrt{2}$ m, a krótsza podstawa 50 m. Pan Jabłoński postanowił wybudować ogrodzenie. Oblicz pole powierzchni działki i długość ogrodzenia.**

Rozwiązanie:



Należy obliczyć:

a) **Pole działki:** $P = \frac{50+x+y+50}{2}\cdot h = \frac{100+x+y}{2}\cdot h$

b) **Obwód działki:** $L = 100 + x + y + a + 30\sqrt{2}$

$h = x = 30$ **(ze wzoru na długość przekątnej kwadratu)**

$$\frac{h}{y} = tg30^0 \Leftrightarrow \frac{30}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = 30\sqrt{3}$$

$$\frac{h}{a} = \sin 30^0 \Leftrightarrow \frac{30}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 60$$

Pole działki:

$$P = \frac{100+x+y}{2}\cdot h = \frac{100+30+30\sqrt{3}}{2}\cdot 30 = \left(130+30\sqrt{3}\right)\cdot 15 = 1950 + 450\sqrt{3}$$

Pole działki wynosi $\left(1950+450\sqrt{3}\right)$ m^2.

Obwód działki:

$$L = 100 + x + y + a + 30\sqrt{2} = 100 + 30 + 30\sqrt{3} + 60 + 30\sqrt{2} = 190 + 30\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$$

Obwód działki wynosi: $\left(190 + 30\sqrt{3} + 30\sqrt{2}\right)$ m.

7. (4 pkt) **W tabeli podano dla porównania dwa plany taryfowe w ofercie sieci komórkowej Orange:**

Plan taryfowy	Orange 15	Orange 30
Wysokość abonamentu	30 zł	40 zł
Liczba bezpłatnych minut i bezpłatnych SMS-ów w abonamencie (koszt 1 min=koszt 4 SMS-ów)	15 minut lub 60 SMS	30 minut lub 120 SMS
Koszt 1 min. po przekroczeniu pakietu bezpłatnych minut	1 zł 65 gr	1 zł 35 gr
Koszt pojedynczego SMS-a po przekroczeniu pakietu bezpłatnych SMS-ów	24 gr	24 gr

a) **Który plan taryfowy powinna wybrać osoba, która rozmawia 20 minut miesięcznie? Odpowiedź uzasadnij.**

b) **Dla obu planów taryfowych napisz wzory wyrażające zależność między wysokością rachunku, a liczba wykorzystanych dodatkowych minut dla osoby, która nie wysyła dodatkowych SMS-ów.**

c) **Przy ilu dodatkowych minutach rachunek zapłacony w ofercie Orange 15 jest mniejszy, niż w ofercie Orange 30?**

Rozwiązanie:

a) W Orange 15 taka osoba zapłaci 30 zł abonamentu, oraz $5 \cdot 1{,}65 = 8{,}25$ zł, czyli łącznie 38,25 zł.
   W Orange 30 zapłaci 40 zł abonamentu.
   Należy wybrać Orange 15.

b) Oznaczmy w obu przypadkach: x – liczba wykorzystanych dodatkowych minut, $x \in \{0,1,2,3,...\}$.
   W Orange 15 rachunek wynosi $f(x) = 30 + 1{,}65 \cdot x$, a w Orange 30 $g(x) = 40 + 1{,}35 \cdot x$.

c) Należy obliczyć, dla jakich x spełniona jest nierówność $f(x) < g(x)$.

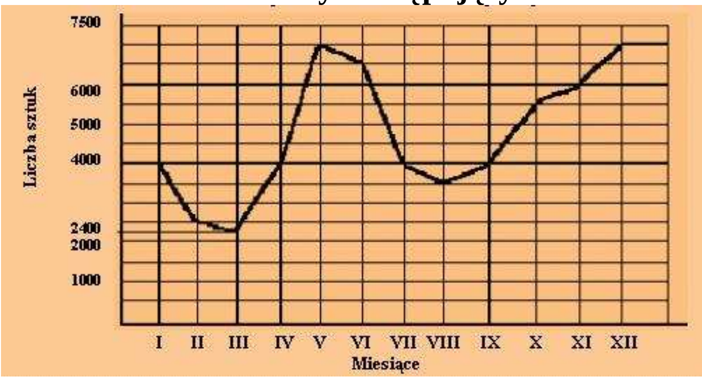
$$30 + 1{,}65 \cdot x < 40 + 1{,}35 \cdot x$$

$$0{,}3 \cdot x < 10$$

$$x < 33\frac{1}{3}$$

   Rachunek w Orange 15 jest mniejszy, gdy ilość dodatkowych minut nie przekracza 33.

8. (4 pkt) W pewnej dużej firmie, sprzedającej sprzęt RTV-AGD wykres liczby sprzedanych telewizorów w 2003 roku był następujący:



Na podstawie wykresu:

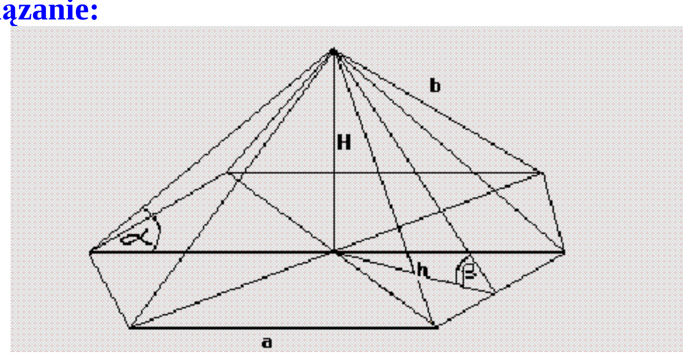
a) Odczytaj, w jakich okresach sprzedaż telewizorów wzrastała.
b) Odczytaj, w jakim miesiącu sprzedano najwięcej telewizorów, a w jakim najmniej.
c) Oblicz, jakim procentem liczby sprzedanych telewizorów była sprzedaż w grudniu.
d) Oblicz, jaka była średnia liczba telewizorów sprzedanych miesięcznie w tym roku.

Rozwiązanie:

a) Sprzedaż telewizorów wzrastała od początku marca do końca kwietnia, oraz od początku sierpnia do końca listopada.
b) Najwięcej telewizorów sprzedano w maju i w grudniu (7000), a najmniej w marcu (2400).
c) Łączna ilość sprzedanych telewizorów:
   4000+2500+2400+4000+7000+6500+4000+3500+4000+5500+6000+7000=56400
   Sprzedaż w grudniu to: $\frac{7000}{56400} \cdot 100\% = \frac{7000}{564}\% \approx 12{,}41\%$
d) Średnia liczba sprzedanych miesięcznie telewizorów: $\frac{56400}{12} = 4700$

9. (5 pkt) Dach pewnej budowli ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość b, a miara kąta nachylenia tej krawędzi do płaszczyzny podstawy wynosi α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa i tangens kąta dwuściennego między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

Rozwiązanie:



Dane są: b, α

Należy obliczyć:

a) $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot H}{2}$

b) $tg\beta = \frac{H}{h} = \frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2H}{a\sqrt{3}}$

$\frac{a}{b} = \cos\alpha \Leftrightarrow a = b\cos\alpha$ oraz $\frac{H}{b} = \sin\alpha \Leftrightarrow H = b\sin\alpha$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot H}{2} = \frac{b^2\cos^2\alpha \cdot \sqrt{3} \cdot b\sin\alpha}{2} = \frac{b^3\sqrt{3}}{2} \cdot \cos^2\alpha\sin\alpha$$

$$tg\beta = \frac{2H}{a\sqrt{3}} = \frac{2b\sin\alpha}{\sqrt{3} \cdot b\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot tg\alpha$$

10. (4 pkt) Wykres funkcji $y = ax + b$ jest nachylony do osi OX pod kątem $\alpha = 45^0$ i przechodzi przez punkt $P = (-2,4)$.

a) Napisz wzór tej funkcji.

b) Sprawdź, czy do wykresu tej funkcji należy wierzchołek paraboli o równaniu $y = -x^2 + 6x + 3$.

c) Zilustruj w układzie współrzędnych zbiór rozwiązań nierówności $y > ax + b$ dla a i b wyznaczonych w punkcie a).

Rozwiązanie:

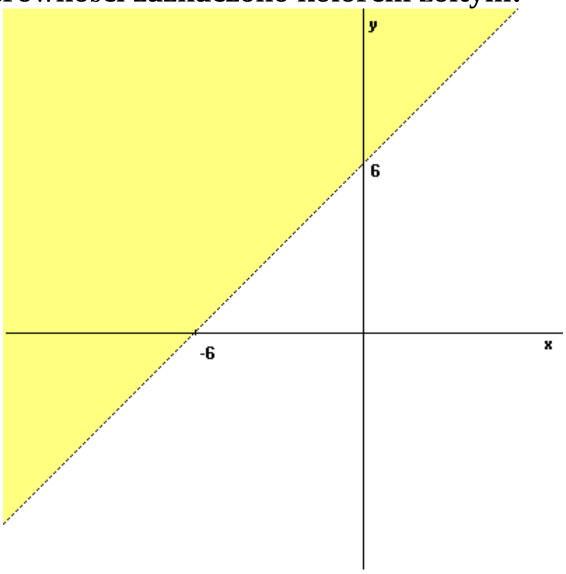
a) $y = ax + b$, oraz $a = tg\alpha = tg45^0 = 1$, skąd mamy $y = x + b$.
Wstawiając współrzędne punktu $P = (-2,4)$ do równania prostej, otrzymujemy:
$4 = -2 + b \Leftrightarrow b = 6$, czyli wzór tej funkcji ma postać: $y = x + 6$.

b) $y = -x^2 + 6x + 3$
Wierzchołek paraboli: $W = (p,q)$

$p = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$, $\Delta = 36 + 12 = 48$, $q = \frac{-48}{-4} = 12$

$W=(3,12)$ i $y=x+6$ - sprawdzamy, czy współrzędne punktu W spełniają równanie prostej: $12 \neq 3+6$, czyli wierzchołek paraboli nie należy do wykresu funkcji $y=x+6$.

c) Zbiór rozwiązań nierówności zaznaczono kolorem żółtym:



11. (4 pkt) Pan Kowalski pożyczył od swojego brata pewną sumę pieniędzy potrzebną na zakup nowych części do samochodu. Zobowiązał się do zwrotu pożyczki w dziesięciu ratach, z których każda była o 60 zł większa od poprzedniej. Ostatnia rata wynosiła 640 zł. Oblicz wysokość pierwszej i szóstej raty oraz kwotę pożyczoną przez pana Kowalskiego.

Rozwiązanie:

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi $r=60$. Wiadomo, że $a_{10}=640$, czyli $a_1+9r=640$.

$a_1=640-9r=640-9\cdot 60=640-540=100$

Pierwsza rata wynosiła 100 zł.

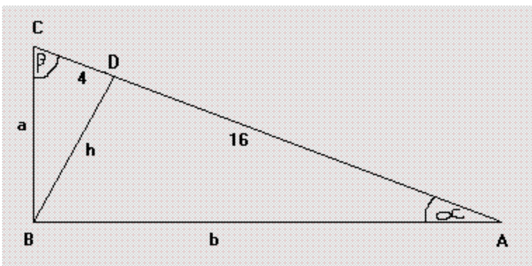
Szósta rata to: $a_6=a_1+5r=100+5\cdot 60=400$ zł.

Kwota pożyczona przez pana Kowalskiego to suma wszystkich rat:

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=5\cdot(100+640)=3700 \text{ zł.}$$

12. (5 pkt) W trójkącie prostokątnym ABC wysokość BD dzieli przeciwprostokątną AC na odcinki o długościach |CD|=4 cm i |AD|=16 cm. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości przyprostokątnych trójkąta ABC, pole koła wpisanego oraz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:



Należy obliczyć: a, b, $P_1=\pi r^2$, $P_2=\pi R^2$, gdzie r to promień koła wpisanego w trójkąt, a R – promień koła opisanego na trójkącie.

ΔBAD jest podobny do trójkąta ΔBDC, gdyż $\angle DBA = \beta$ i $\angle DBC = \alpha$, czyli te trójkąty mają takie same kąty. Porównując ilorazy odpowiednich boków w tych trójkątach, otrzymujemy:

$$\frac{4}{h} = \frac{h}{16} \Leftrightarrow h^2 = 64 \Leftrightarrow h = 8$$

W trójkącie BAD:

$b^2 = h^2 + 16^2 = 8^2 + 16^2 = 8^2 \cdot 5$**, stąd** $b = 8\sqrt{5}$**.**

W trójkącie BDC:

$a^2 = h^2 + 4^2 = 8^2 + 4^2 = 4^2 \cdot 5$**, stąd** $a = 4\sqrt{5}$**.**

Boki trójkąta mają długości: $8\sqrt{5}$ **i** $4\sqrt{5}$**.**

Promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej, czyli $R = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ **cm.**

Pole tego koła: $P_2 = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2$**.**

Promień koła wpisanego w trójkąt ma długość: $r = \frac{S}{p}$**, gdzie S – pole trójkąta ABC, a p – połowa obwodu trójkąta ABC.**

$$r = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}\cdot(a+b+20)} = \frac{4\sqrt{5}\cdot 8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}+8\sqrt{5}+20} = \frac{160}{4\cdot\left(3\sqrt{5}+5\right)} = \frac{40\left(3\sqrt{5}-5\right)}{\left(3\sqrt{5}+5\right)\cdot\left(3\sqrt{5}-5\right)} =$$

$$= \frac{40\left(3\sqrt{5}-5\right)}{45-25} = 6\sqrt{5}-10$$

Pole tego koła: $P_1 = \pi r^2 = \pi \cdot \left(6\sqrt{5}-10\right)^2$