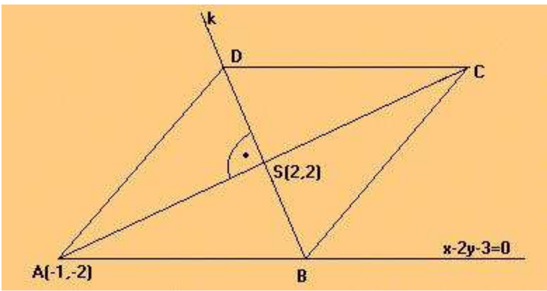
Przykładowy arkusz z rozwiązaniami

Arkusz II – poziom rozszerzony

13. (5 pkt) Punkt A=(-1 , -2) jest wierzchołkiem rombu, którego jeden z boków zawiera się w prostej k o równaniu x - 2y - 3 = 0. Środkiem symetrii tego rombu jest punkt S=(2 , 2). Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu i oblicz jego pole.

Rozwiązanie:



W rombie przekątne dzielą się na połowy, więc S jest środkiem odcinka AC.

Niech $C=(c_1,c_2)$. **Wtedy:** $\frac{-1+c_1}{2}=2 \Leftrightarrow c_1=5$, **oraz** $\frac{-2+c_2}{2}=2 \Leftrightarrow c_2=6$, **czyli punkt C ma współrzędne** $C=(5,6)$.

Prosta k zawierająca przekątną BD rombu jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{AS}$, **bo przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.**

$\overrightarrow{AS}=[2+1,2+2]=[3,4]$

Prosta k, jako prostopadła do tego wektora, ma równanie: $3x+4y+m=0$.

Punkt $S=(2,2)$ **spełnia równanie prostej k, stąd:** $3\cdot 2+4\cdot 2+m=0 \Leftrightarrow m=-14$.

Prosta k ma równanie: $3x+4y-14=0$.

Współrzędne punktu B obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 3x+4y-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3 \\ 3\cdot(2y+3)+4y-14=0 \end{cases}$$

$$6y+9+4y-14=0$$

$$10y=5$$

$$y=\frac{1}{2} \text{ i } x=2\cdot\frac{1}{2}+3=4$$

Punkt B ma współrzędne $B=\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

S jest środkiem odcinka BD. Niech $D=(d_1,d_2)$.

$$2=\frac{4+d_1}{2} \Leftrightarrow d_1=0\text{, oraz } 2=\frac{\frac{1}{2}+d_2}{2} \Leftrightarrow d_2=\frac{7}{2}.$$

Punkt D ma współrzędne $D=\left(0,\frac{7}{2}\right)$.

Szukane współrzędne wierzchołków rombu: $B=\left(4,\frac{1}{2}\right)$, $C=(5,6)$, $D=\left(0,\frac{7}{2}\right)$.

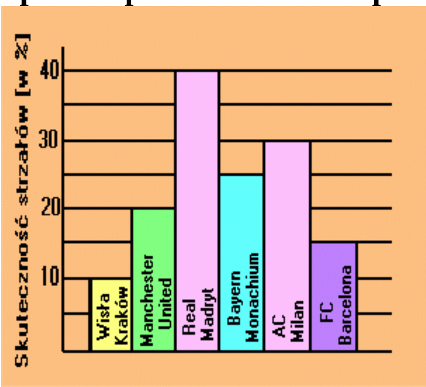
Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości przekątnych:

$|AC| = \sqrt{(5+1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

$|BD| = \sqrt{(4-0)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Pole rombu: $P = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$.

14. (5 pkt) Prawdopodobieństwo uzyskania bramki przez drużynę piłkarską przy oddaniu jednego strzału oblicza się jako stosunek liczby zdobytych bramek do liczby oddanych strzałów na bramkę i wyraża się je zwykle w procentach. Na poniższym diagramie przedstawiono te prawdopodobieństwa dla poszczególnych drużyn:



a) **Co jest bardziej prawdopodobne: zdobycie dwóch bramek przez Wisłę Kraków przy oddanych 6 strzałach, czy zdobycie 3 bramek przez Manchester United przy oddanych 5 strzałach?**

b) **Ile strzałów na bramkę musi oddać w czasie meczu drużyna Realu Madryt, aby prawdopodobieństwo strzelenia jednej bramki było większe od 0,9?**

Rozwiązanie:

a) **Oddanie przez Wisłę Kraków 6 strzałów to schemat Bernoulliego o sześciu próbach, bo prawdopodobieństwo sukcesu (zdobycia gola) w każdym strzale jest takie samo i wynosi** $p_1 = 10\% = \frac{1}{10}$.

Stąd $P(S_6 = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 15 \cdot \frac{9^4}{10^6} \approx 0{,}0984$. **Podobnie dla Manchesteru United, gdzie prawdopodobieństwo sukcesu wynosi** $p_2 = 20\% = \frac{1}{5}$:

$$P(S_5 = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \cdot \frac{4^2}{5^5} \approx 0{,}0512$$

Bardziej prawdopodobne jest zdobycie przez Wisłę Kraków dwóch bramek w 6 strzałach.

b) **Oznaczmy przez n szukaną ilość strzałów. Mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego o n próbach i prawdopodobieństwie sukcesu** $p_3 = 40\% = \frac{2}{5}$.

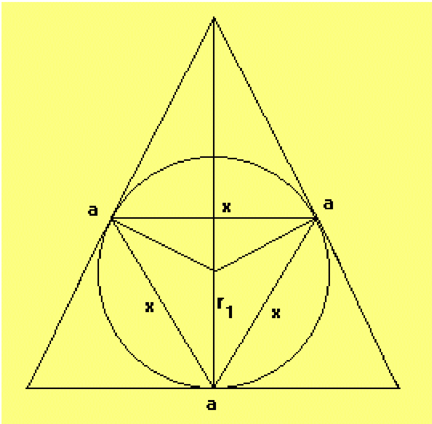
$$P(S_n \geq 1) > 0{,}9 \iff 1 - P(S_n = 0) > 0{,}9 \iff P(S_n = 0) < 0{,}1$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0{,}1 \iff \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0{,}1$$

Licząc kolejne potęgi liczby $\frac{3}{5}$ stwierdzamy, że nierówność jest spełniona dla $n > 4$, czyli drużyna Realu Madryt musi oddać minimum 5 strzałów, aby szansa na zdobycie co najmniej jednej bramki była większa od 0,9.

15. (4 pkt) W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano koło, w które następnie wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znowu koło itd. Oblicz sumę pól wszystkich wpisanych kół.

Rozwiązanie:



Dane: a.

Promień koła wpisanego w trójkąt równoboczny ma długość równą $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta, więc $r_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Z kolei r_1 stanowi $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta o boku x, wpisanego w koło o promieniu r_1.

Stąd mamy: $\frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = r_1$. Z tego równania obliczymy x: $x = \frac{3r_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}r_1 = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2}$.

Ciąg długości boków kolejnych trójkątów jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Z własności figur podobnych mamy ciąg promieni okręgów: $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $q = \frac{1}{2}$, z czego otrzymujemy wzór na n-ty wyraz: $r_n = r_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$.

Ciąg pól kolejnych kół jest określony wzorem:

$$P_n = \pi \cdot r_n^2 = \pi \cdot \frac{3a^2}{36} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$P_1 = \frac{\pi a^2}{12} \text{ i } q_p = \frac{1}{4}$$

Ponieważ $|q_p| < 1$, więc suma nieskończonego ciągu pól istnieje i wynosi:

$$S=\frac{P_1}{1-q_p}=\frac{\frac{\pi a^2}{12}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi a^2}{12}=\frac{\pi a^2}{9}$$, co należało obliczyć.

16. (7 pkt) Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $(m+1)x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m^2=0$.

Rozważmy funkcję $f(m)=x_1\cdot x_2$.

a) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f.

b) Dla jakiej wartości parametru m funkcja f przyjmuje największą wartość?

Rozwiązanie:

$(m+1)x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m^2=0$, $f(m)=x_1\cdot x_2$

Dziedziną funkcji f jest zbiór tych wartości parametru m, dla których istnieją (niekoniecznie różne) pierwiastki x_1 i x_2 podanego równania, czyli spełniających układ:

$$\begin{cases} m\neq -1 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}.$$

$$\Delta=(m+1)^2-4\cdot(m+1)\cdot\frac{1}{2}m^2=(m+1)^2-2m^2(m+1)=(m+1)(m+1-2m^2)$$

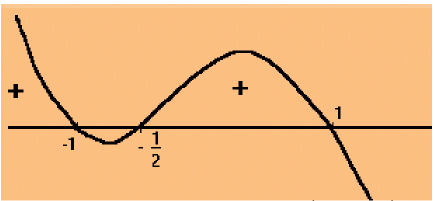
$-2m^2+m+1$

$\Delta_1=1+8=9$

$$m_1=\frac{-1-3}{-4}=1\ ,\ m_2=\frac{-1+3}{-4}=-\frac{1}{2}$$

$$\Delta=-2(m+1)(m-1)\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

Wykres $\Delta(m)$:



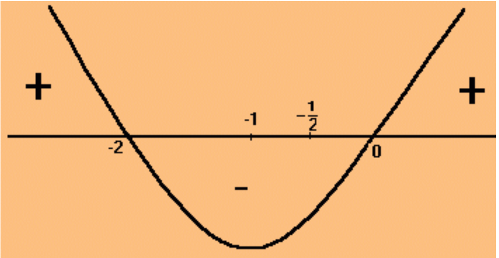
$$(m\neq -1\ \wedge\ \Delta\geq 0)\Leftrightarrow m\in(-\infty,-1)\cup\left\langle -\frac{1}{2},1\right\rangle=D_f$$

Korzystając ze wzorów Viete'a mamy:

$$f(m)=x_1\cdot x_2=\frac{\frac{1}{2}m^2}{m+1}=\frac{m^2}{2m+2}$$

a) $$f'(m)=\frac{2m\cdot(2m+2)-2m^2}{(2m+2)^2}=\frac{4m^2+4m-2m^2}{(2m+2)^2}=\frac{2m^2+4m}{(2m+2)^2}=\frac{2m(m+2)}{(2m+2)^2}$$

Badamy znak pochodnej, który zależy od znaku wyrażenia $m(m+2)$:



Z wykresu wynika, że:

- funkcja f(m) rośnie w przedziałach: $(-\infty,-2)$, $(0,1)$.

- funkcja f(m) maleje w przedziałach: $(-2,-1)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

- Dla $x=-2$ funkcja osiąga maksimum równe: $f(-2)=\frac{(-2)^2}{2\cdot(-2)+2}=-2$.

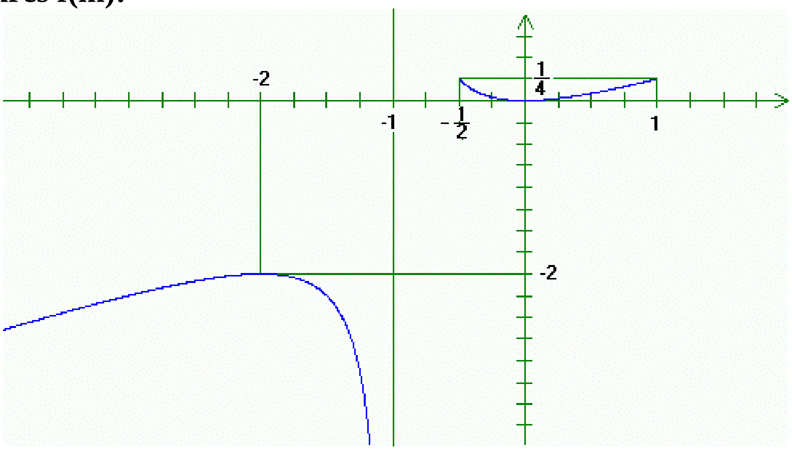
- Dla $x=0$ funkcja osiąga maksimum równe: $f(0)=0$.

b) Wartości funkcji na końcach przedziału wynoszą:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2}=\frac{1}{4}\quad,\quad f(1)=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{m^2}{2m+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{m}{2+\frac{2}{m}}=-\infty$$

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{m^2}{2m+2}=-\infty$, **bo licznik dąży do 1, a mianownik do zera po wartościach ujemnych. Wykres f(m):**



Z wykresu wynika, że funkcja przyjmuje największą wartość dla $m=-\frac{1}{2}$ lub $m=1$, oraz wartość ta wynosi $\frac{1}{4}$.

17. (5 pkt) Wykaż, że dla każdej naturalnej, dodatniej liczby n, liczba postaci $2^{n+1}+3^{2n-1}$ jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

Sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n = 1$: $2^{1+1} + 3^{2\cdot1-1} = 4 + 3 = 7$.

Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n, tzn. liczba $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ jest podzielna przez 7.

Aby zakończyć dowód, należy udowodnić, że przez 7 dzieli się liczba $2^{n+1+1} + 3^{2(n+1)-1} = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

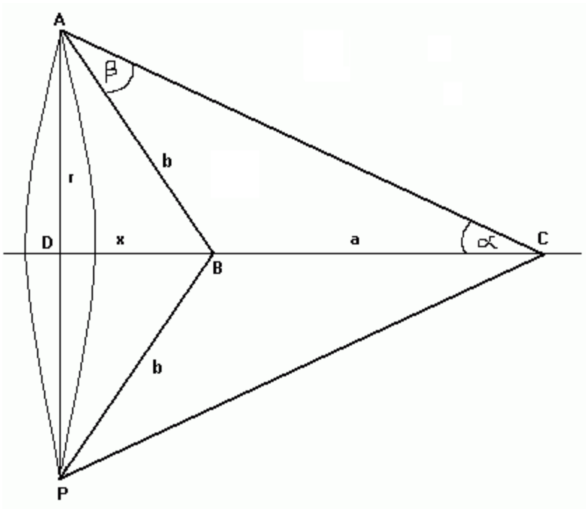
$$2^{n+2} + 3^{2n+1} = 2^{n+1}\cdot 2^1 + 3^{2n-1}\cdot 3^2 = 2\cdot 2^{n+1} + 9\cdot 3^{2n-1} = 2\cdot\left(2^{n+1} + 3^{2n-1}\right) + 7\cdot 3^{2n-1}$$

Wyrażenie $2\cdot\left(2^{n+1} + 3^{2n-1}\right)$ dzieli się przez 7 z założenia.

Przez 7 dzieli się także liczba $7\cdot 3^{2n-1}$, co kończy dowód.

18. (5 pkt) Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\angle BCA| = \alpha$, $|\angle BAC| = \beta$, zaś $|\angle ABC| > 90^0$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość R. Trójkąt obracamy wokół boku BC. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.

Rozwiązanie:



Dane są: α, β, R, $|\angle ABC| > 90^0$.

R - promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Szukana objętość, to różnica objętości stożków APC i APB, czyli:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot(a + x) - \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot x = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot(a + x - x) = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot a$$

Korzystając z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC, otrzymujemy:

$$\frac{a}{\sin\beta} = 2R \iff a = 2R\sin\beta \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sin\alpha} = 2R \iff b = 2R\sin\alpha$$

$|\angle ABC| = 180^0 - (\alpha + \beta)$, **dlatego** $|\angle ABD| = \alpha + \beta$

$$\frac{r}{b} = \sin(\alpha + \beta) \iff r = b\sin(\alpha + \beta) = 2R\sin\alpha\sin(\alpha + \beta)$$

Szukana objętość wynosi:

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot a = \frac{\pi}{3}\cdot 4R^2\sin^2\alpha\sin^2(\alpha + \beta)\cdot 2R\sin\beta = \frac{8\pi}{3}\cdot R^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin^2(\alpha + \beta)$$

19. (5 pkt) Dla jakich wartości parametru α rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases}(\cos\alpha-1)\cdot x+y=1\\(-2\cos\alpha)\cdot x+(2\cos\alpha+1)\cdot y=\cos\alpha\end{cases}$$

jest dokładnie jedna para liczb nieujemnych?

Rozwiązanie:

Stosujemy metodę wyznacznikową. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $m=\cos\alpha$. Mamy:

$$\begin{cases}(m-1)\cdot x+y=1\\-2m\cdot x+(2m+1)\cdot y=m\end{cases}$$

$$W=\begin{vmatrix}m-1 & 1\\-2m & 2m+1\end{vmatrix}=(m-1)\cdot(2m+1)+2m=2m^2+m-2m-1+2m=$$

$$=2m^2+m-1$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy:

$$W=2m^2+m-1\neq 0$$

$$\Delta=1+8=9\ ,\ m_1=\frac{-1-3}{4}=-1\ ,\ m_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$$

Aby układ miał dokładnie jedno rozwiązanie, musi być: $m\neq -1$ i $m\neq\frac{1}{2}$.

$$W_x=\begin{vmatrix}1 & 1\\m & 2m+1\end{vmatrix}=2m+1-m=m+1$$

$$W_y=\begin{vmatrix}m-1 & 1\\-2m & m\end{vmatrix}=m^2-m+2m=m^2+m=m\cdot(m+1)$$

$$W=2m^2+m-1=2(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right)$$

Rozwiązanie układu:

$$\begin{cases}x=\dfrac{W_x}{W}=\dfrac{m+1}{2(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{2\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)}\\[2ex] y=\dfrac{W_y}{W}=\dfrac{m\cdot(m+1)}{2(m+1)\left(m-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{m}{2\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)}\end{cases}$$

Rozwiązaniem ma być para liczb nieujemnych: $x\geq 0$ i $y\geq 0$.

$$x\geq 0\ \Leftrightarrow\ m-\frac{1}{2}>0\ \Leftrightarrow\ m>\frac{1}{2}$$

$$y\geq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{m}{2\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \left[m\neq\frac{1}{2}\ \text{ i }\ m\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)\geq 0\right]\ \Leftrightarrow\ m\in\left(-\infty,0\right\rangle\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$$

Ostatecznie otrzymaliśmy:

$$\begin{cases} m \neq -1 \text{ i } m \neq \frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \\ m \in \left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > \frac{1}{2}, \text{ czyli } \cos\alpha > \frac{1}{2}$$

Korzystając z wykresu funkcji $y = \cos\alpha$, otrzymujemy:

$\cos\alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, **$k \in C$, co jest rozwiązaniem zadania.**

20. (6 pkt) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem: $f(x) = 4^{|\log_2(x-1)|}$. Wyznacz te argumenty, dla których wartości funkcji są równe $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{9}$.

Rozwiązanie:

Dziedzina funkcji $f(x) = 4^{|\log_2(x-1)|}$: $D_f = (1, \infty)$.

$\log_2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$

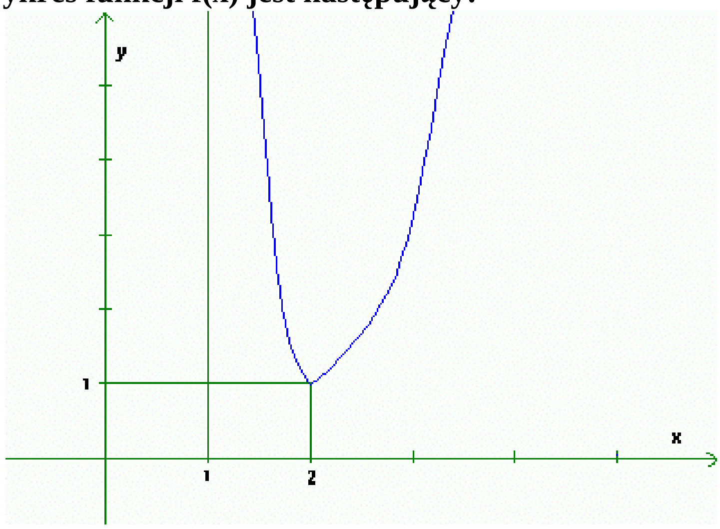
$\log_2(x-1) < 0 \Leftrightarrow \log_2(x-1) < \log_2 1 \Leftrightarrow x - 1 < 1 \Leftrightarrow x \in (1,2)$

Mamy:

1. **Dla $x \geq 2$: $f(x) = 4^{\log_2(x-1)} = 2^{2\log_2(x-1)} = 2^{\log_2(x-1)^2} = (x-1)^2$**
2. **Dla $x \in (1,2)$: $f(x) = 4^{-\log_2(x-1)} = 2^{-2\log_2(x-1)} = 2^{\log_2(x-1)^{-2}} = \frac{1}{(x-1)^2}$**

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{dla } x \geq 2 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{dla } x \in (1,2) \end{cases}$$

Wartość ułamka $\frac{1}{(x-1)^2}$ przy $x \to 2^-$ zbliża się do liczby 1, a przy x zmniejszającym się do 1, rośnie do nieskończoności, bo mianownik ułamka dąży do zera po wartościach dodatnich. Stąd wykres funkcji f(x) jest następujący:



$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{9}=m \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^m=\frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}-1}\right)^m=3^{-2} \Leftrightarrow 3^{-\frac{1}{2}m}=3^{-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}m=-2 \Leftrightarrow m=4$$

Należy rozwiązać równanie $f(x)=\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{9}$, czyli $f(x)=4$.

1. **Dla $m\geq 2$: $(m-1)^2=4 \Leftrightarrow m=3$**
2. **Dla $m\in(1,2)$: $\frac{1}{(m-1)^2}=4 \Leftrightarrow (m-1)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$**

Funkcja przyjmuje wskazaną tematem zadania wartość dla $x=3$ lub $x=\frac{3}{2}$.

21. (4 pkt) Wykaż, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, oraz $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\neq 0$,

to $\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Rozwiązanie:

1. $\sin\gamma=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
2. $\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Na podstawie 1. i 2. otrzymujemy:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

co należało wykazać.

Uwaga: poniższe nie jest fragmentem rozwiązania.
W rozwiązaniu wykorzystano kolejno wzory:

$\sin(\pi-x)=\sin x$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\sin+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x$

22. (4 pkt) Dany jest zbiór $A = \{(x,y): x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 - 4y \le 0\}$. Zbiór B jest obrazem zbioru A w translacji o wektor $\vec{u} = [2,-1]$. Opisz zbiór B za pomocą nierówności, a następnie zaznacz na płaszczyźnie zbiór $(A \cup B)'$.

Rozwiązanie:

$x^2 + y^2 - 4y \le 0 \iff x^2 + (y-2)^2 \le 4$

Zbiór A jest kołem o środku $S_1 = (0,2)$ i promieniu $r = 2$.

Zbiór B jest kołem o środku $S_2 = (0+2, 2+(-1)) = (2,1)$ i takim samym promieniu.

$(A \cup B)'$ jest dopełnieniem sumy tych kół do płaszczyzny XOY. Brzegi kół nie należą do tego zbioru.

Ilustracja (szukany zbiór $(A \cup B)'$ zaznaczono kolorem niebieskim):