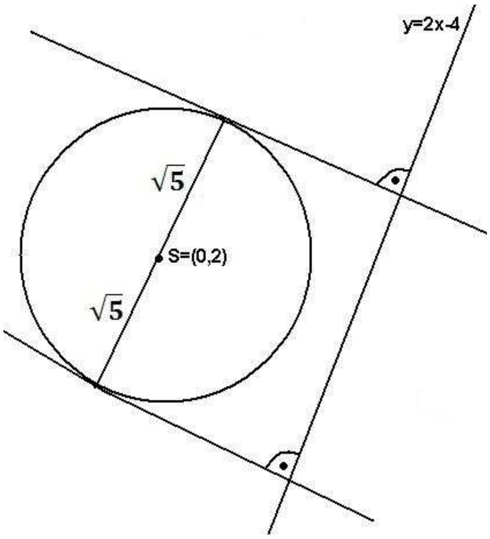
Geometria analityczna: zadania o stycznej do okręgu

We wszystkich zadaniach o stycznej do okręgu polecamy wykorzystywanie wzoru na odległość punktu od prostej danej równaniem ogólnym.
W większości przypadków daje to rozwiązanie kosztem najmniejszej ilości obliczeń.
Rozwiążemy dwa przykładowe zadania.

Zadanie 1

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2+(y-2)^2=5$ i prostopadłych do prostej o równaniu $y=2x-4$.



Styczne są prostopadłe do prostej $y=2x-4$, dlatego mają równania:

$y=-\frac{1}{2}x+b$

$2y=-x+2b$

$x+2y-2b=0$

Odległość środka okręgu $S=(0,2)$ od stycznej wynosi $\sqrt{5}$:

$\sqrt{5}=\frac{|0+2\cdot 2-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$\sqrt{5}=\frac{|4-2b|}{\sqrt{5}}$

$|4-2b|=5$

$4-2b=5 \quad lub \quad 4-2b=-5$

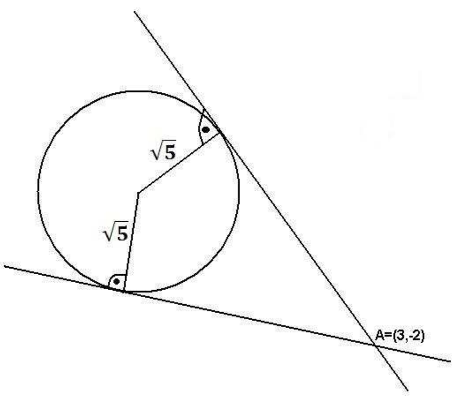
$b=-\frac{1}{2} \quad lub \quad b=\frac{9}{2}$

Równania stycznych:

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad lub \quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

Zadanie 2

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2+(y-2)^2=5$ i przechodzących przez punkt $A=(3,-2)$.



Styczne o równaniach $y=ax+b$ przechodzą przez punkt $A=(3,-2)$, dlatego:

$-2=3a+b \quad \Leftrightarrow \quad b=-3a-2$

Równania stycznych:

$y=ax-3a-2$

$ax-y-3a-2=0$

Odległość środka okręgu $S=(0,2)$ od stycznej $ax-y-3a-2=0$ wynosi $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{5}=\frac{|a\cdot 0-2-3a-2|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}=|-3a-4|$$

$$5(a^2+1)=9a^2+24a+16$$

$$5a^2+5=9a^2+24a+16$$

$$4a^2+24a+11=0$$

$$\Delta=576-16\cdot 11=576-176=400$$

$$a_1=\frac{-24-20}{8}=-\frac{44}{8}=-\frac{11}{2}\quad,\quad a_2=\frac{-24+20}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Równania stycznych:

$$-\frac{11}{2}x-y-3\cdot\left(-\frac{11}{2}\right)-2=0\quad lub\quad -\frac{1}{2}x-y-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=0$$

$$11x+2y-33+4=0\qquad lub\qquad x+2y-3+4=0$$

$$11x+2y-29=0\qquad lub\qquad x+2y+1=0$$