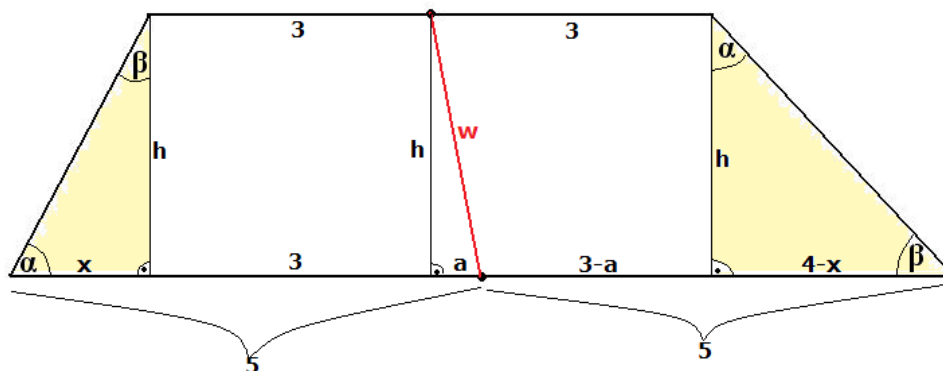


Poniżej znajdują się nadesłane przez nauczyciela tematy trzech zadań, oraz propozycje ich rozwiązań. Zadania pochodzą ze zbiorów służących do przygotowania do matury 2010.

1. Podstawy trapezu mają długości **10** i **6**. Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta przy dłuższej podstawie jest równa **90°**. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw.

### Rozwiązanie



Trójkąty oznaczone kolorem są podobne, bo mają takie same kąty. Wobec tego mamy równanie:

$$\frac{h}{x} = \frac{4-x}{h} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = x(4-x)$$

Poza tym:

$$x + 3 + a = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 - x$$

Teraz liczymy niewiadomą  $w$ :

$$w^2 = h^2 + a^2 = x(4-x) + (2-x)^2 = 4x - x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4$$

$$w = 2$$

2. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj zbiór tych wszystkich punktów o współrzędnych  $(b, c)$ , dla których różne pierwiastki  $x_1, x_2$  równania  $x^2 - bx - 2c = 0$  spełniają warunek  $(x_1 + x_2)^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$ .

### Rozwiązanie

Mają być różne pierwiastki, czyli:

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + 8c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8c > -b^2$$

$$c > -\frac{1}{8}b^2$$

Ten warunek spełniają wszystkie punkty leżące nad parabolą o równaniu  $c = -\frac{1}{8}b^2$ .

---

Drugi z warunków, który musi być spełniony jest podany w temacie zadania:

$$(x_1 + x_2)^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$$

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$$

$$3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 < -6$$

$$3x_1x_2(x_1 + x_2) < -6$$

$$x_1x_2(x_1 + x_2) < -2$$

Korzystamy ze wzorów Viete'y:

$$x_1x_2 = -2c, \quad x_1 + x_2 = b$$

Mamy:

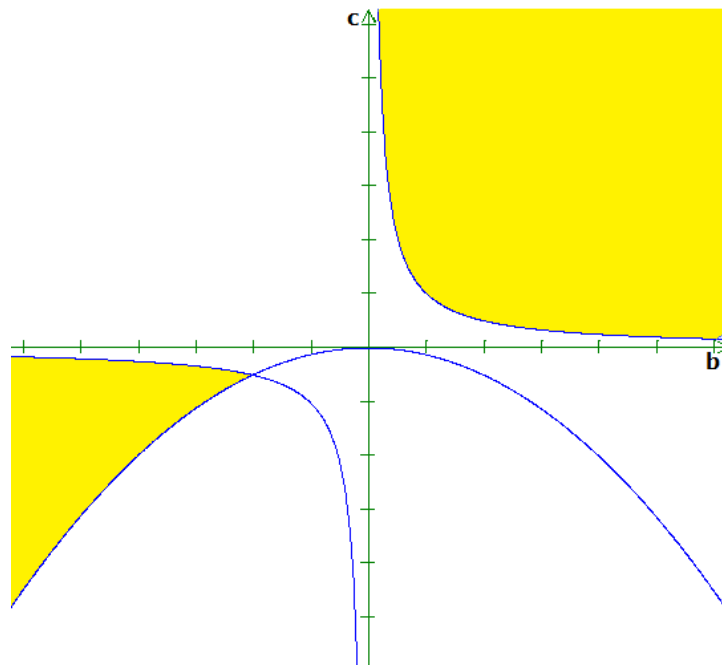
$$-2c \cdot b < -2$$

$$c \cdot b > 1$$

Zakładamy, że  $b \neq 0$  ( $b = 0$  nie spełnia tej nierówności) i mamy:

a) Dla  $b > 0$ :  $c > \frac{1}{b}$  - zbiór punktów nad hiperbolą o równaniu  $c = \frac{1}{b}$

b) Dla  $b < 0$ :  $c < \frac{1}{b}$  - zbiór punktów pod hiperbolą o równaniu  $c = \frac{1}{b}$



Szukany zbiór zaznaczony jest kolorem żółtym (bez brzegów).



3. Wykaż, że jeśli ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to ciąg o wyrazie ogólnym  $b_n = \log_p a_n$  dla  $p > 0$  i  $p \neq 1$  jest ciągiem arytmetycznym.

### Rozwiązanie

Wiadomo, że  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const.}$  oraz  $a_n > 0$  dla  $n \in N_+$ .

Z powyższych danych wynika również, że  $q > 0$ .

Należy udowodnić, że  $b_{n+1} - b_n = \text{const.}$  dla  $n \in N_+$ .

$$b_{n+1} - b_n = \log_p a_{n+1} - \log_p a_n = \log_p \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_p q = \text{const.}$$

Tym samym dowód jest zakończony.